



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ФАКУЛТЕТ ЗА МАШИНСТВО
И ГРАЂЕВИНАРСТВО
У КРАЉЕВУ**



Раде Р. ВАСИЉЕВИЋ

**УТИЦАЈНИ ПАРАМЕТРИ НА ДИНАМИЧКО
ПОНАШАЊЕ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ
ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА
ВЕЛИКИХ НОСИВОСТИ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Краљево, 2016.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА

I - АУТОР	
Име и презиме:	мр Раде ВАСИЉЕВИЋ, дипл. маш. инж.
Датум и место рођења:	18.06.1971., Сирогојно, Србија
Садашње запослење:	Предавач у Високој техничкој школи струковних студија у Београду
II - ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА	
Наслов:	Утицајни параметри на динамичко понашање носеће конструкције порталних дизалица великих носивости
Број страница:	126
Број слика:	106
Број библиографских података:	62
Установа и место где је рад израђен:	Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву Универзитета у Крагујевцу, Краљево
Научна област (УДК):	Машинске конструкције и механизација (Портални кранови 621.875.5)
Ментор:	др Миломир ГАШИЋ, ред. проф. Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву
III - ОЦЕНА И ОДБРАНА	
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:	IV-04-206/7 09.04.2014.
Комисија за оцену подобности теме и кандидата:	1. др Јован ВЛАДИЋ, ред. проф. Факултет техничких наука у Новом Саду 2. др Миле САВКОВИЋ, ред. проф. Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву 3. др Радован БУЛАТОВИЋ, ван. проф. Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву 4. др Миломир ГАШИЋ, ред. проф. Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације:	1. др Јован ВЛАДИЋ, ред. проф., Председник Факултет техничких наука у Новом Саду 2. др Драгослав ЈАНОШЕВИЋ, ред. проф., Члан Машински факултет у Нишу 3. др Миле САВКОВИЋ, ред. проф., Члан Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву
Датум одбране дисертације:	

УТИЦАЈНИ ПАРАМЕТРИ НА ДИНАМИЧКО ПОНАШАЊЕ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА ВЕЛИКИХ НОСИВОСТИ

РЕЗИМЕ

У докторској дисертацији обрађени су проблеми везани за утицајне параметре на динамичко понашање носеће конструкције порталних дизалица. У ужем смислу, спроводена је динамичка анализа носеће конструкције типа Н и Х порталних дизалица услед кретања портала и осциловања терета.

Пре него што се приступило динамичкој анализи дефинисане су одговарајуће подлоге. Прво, дата су уводна разматрања у основе проблематике порталних дизалица, односно дате су основне и конструктивне напомене о порталним дизалицама, предложена је могућа класификација порталних дизалица, дефинисан је значај транспорта порталним дизалицама и тренд развоја порталних дизалица. Друго, дата су уводна разматрања у проблематику динамике порталних дизалица, односно дефинисан је значај динамичке анализе порталних дизалица, дат је преглед релевантних радова из области динамике порталних и сличних дизалица, дефинисана је методологија динамичке анализе, дефинисани су основни и посебни циљеви истраживања и приказан план истраживања. Треће, дате су концепције конструктивних решења носеће конструкције порталних дизалица, при чему је посебан акценат дат на два типа Н и Х.

У првом кораку динамичке анализе, усвојен је комбиновани приступ за истраживање насловног проблема, тако што су принципи аналитичке механике искоришћени за моделирање обртне стреле, док је коначно-елементни приступ искоришћен за моделирање носеће конструкције порталне дизалице. Упоредно се разматрају два конструкциона типа порталних дизалица Н и Х. Прво, формиран је оригинални динамички модел обртне стреле, који је исти за оба типа дизалице. Анализа динамичког модела стреле односно побуде се спроводи се на основу Њутнових закона и основних једначина аналитичке механике (Даламберов принцип и Лангранжеве једначине друге врсте). Затим, за оба типа порталне дизалице, формиран је коначно-елементни модел носеће конструкције. Извршена је модална анализа. Утврђена је динамичка интеракција између обртне стреле и носеће конструкције порталне дизалице. Коначно, постављени су математички модели порталне дизалице, чија решења су добијена помоћу метода директне интеграције (корак-по-корак метод), односно, конкретно Њумарковом методом. На овим основама у програму *Mathematica* написани су оригинални кодови. Одређен је и анализиран одговор носеће конструкције порталне дизалице на побуду услед кретања дизалице и осциловања терета. Неки од истражених утицајних фактора су брзина и убрзање/успорење дизалице, клаћење терета и еластични ослонци (опруге) у систему носеће конструкције. Нумерички резултати предметног истраживања, пре свега, могу се искористити у почетним фазама пројектовања и конструисања порталних дизалица ради остваривања бољег увида у динамичко понашање.

Кључне речи: Портална дизалица, побуда, обртна стрела, носећа конструкција, МКЕ, динамички одговор, директна интеграција

Научна област: Техничке науке, Машинство

Ужа научна област: Машинске конструкције и механизација

PARAMETERS INFLUENCING THE DYNAMIC BEHAVIOUR OF THE CARRYING STRUCTURE OF PORTAL CRANE OF LARGE CAPACITY

SUMMARY

The problems related to influential parameters on dynamic behavior of portal crane carrying structure are analyzed in this doctoral dissertation. In a narrow sense, the procedure of the dynamic analysis of the carrying structure of a type H and X portal crane due to moving portal and oscillation loads.

Before it was accessed to the dynamic analysis, appropriate substrate are defined. As first, the introductory considerations to basic problems of portal cranes, are given the basic and constructive remarks on the portal cranes, the possible classification of portal cranes is suggested, the importance of transport portal cranes and gantry cranes development trend are defined. Second, the introductory considerations in the issue of the dynamics of portal cranes are given, and importance of dynamic analysis portal crane is defined, an overview of relevant publications in the field of dynamic portal cranes and similar cranes is given, the methodology of dynamic analysis is defined, the basic and specific objectives of the research are given and plan of research is presented. Third, concepts of constructive solutions of carrying structure portal cranes, are given witness the special emphasis is given to the two types of H and X.

In the first step of dynamic analysis, a combined approach to research the title problem is adopted, so that the principles of analytical mechanics are utilized for modeling of rotating boom, while finite elements approach is used for modeling of carrying structures portal cranes. Comparatively two constructional type portal crane H and X are discussed. First, the original dynamic model of the rotating boom is set up, which is the same for both types of cranes. Analysis of the dynamic model of lightning and initiatives are conducted on the basis of Newton's laws and the basic equations of analytical mechanics (D'Alembert's principle and Lagrange equations of the second kind). Then, for both types of gantry cranes, was established finite element model carrying structure. Modal analysis was performed. There was a dynamic interaction between rotating boom and carrying structures portal cranes. Finally, mathematical models of portal cranes, were set up which solutions are obtained by using the method of direct integration (step-by-step methods), or, more specifically Newmark method. On these basic the original program are written in Mathematica codes. The response carrying structures portal cranes on excitation due to moving of the crane and the oscillation of the load is determined and analyzed. Some of the investigated influencing factors are speed and acceleration/deceleration of cranes, oscillation load and elastic supports (springs) in the system of carrying structure. Numerical results of the mentioned research, first of all, can be used in the initial stages of design and construction of portal cranes in order to achieve better insight into the dynamic behavior.

Key words: Portal crane, Excitation, Rotating boom, Carrying structure, FEA, Dynamic responses, Direct integration

Scientific discipline: Technical sciences, Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanical construction and mechanization

САДРЖАЈ

1. УВОДНА РАЗМАТРАЊА	1
1.1 УВОД У ОСНОВЕ ПРОБЛЕМАТИКЕ ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА	2
1.1.1 Основне напомене и принцип рада	2
1.1.2 Класификација	5
1.1.3 Значај транспорта порталним дизалицама	12
1.1.4 Тренд развоја порталних дизалица	12
1.2 УВОД У ПРОБЛЕМАТИКУ ДИНАМИКЕ ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА .	13
1.2.1 Значај динамичке анализе порталних дизалица	13
1.2.2 Радови из области динамике порталних дизалица велике носивости и других сличних дизалица	14
1.2.3 Методологија динамичке анализе	27
1.2.4 Основни и посебни циљеви истраживања	28
1.2.5 План истраживања	28
2. КОНЦЕПЦИЈЕ КОНСТРУКЦИОНИХ РЕШЕЊА НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ И ЊИХОВЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ	30
3. ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ ВЕЛИКЕ НОСИВОСТИ	43
3.1 МОДЕЛИРАЊЕ ОБРТНЕ СТРЕЛЕ ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ	44
3.1.1 Кинематичке величине кретања портала	44
3.1.2 Опис модела стреле	46
3.1.3 Математичка формулација	47
3.1.3.1 Осциловање терета	48
3.1.3.2 Динамичка оптерећења портала	52

3.2	МОДЕЛИРАЊЕ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ	54
3.2.1.	Чворови	59
3.2.2	Коначни елементи	61
3.2.3	Матрице крутости и маса коначног елемент	63
3.2.3.1	Интерполационе функције коначног елемента .	65
3.2.3.1.1	Коначни елемент типа <i>ik</i>	65
3.2.3.1.1	Коначни елемент типа <i>ig</i>	68
3.2.3.2	Матрица крутости коначног елемента типа <i>ik</i> ...	71
3.2.3.3	Матрица маса коначног елемента типа <i>ik</i>	73
3.2.4	Трансформациона матрица	75
3.2.5	Матрице крутости и маса КЕ модела носеће конструкције	78
3.2.6	Једначина динамичке равнотеже	79
3.2.7	Фреквентни одзив	80
3.2.8	Матрица пригушења КЕ модела носеће конструкције	81
3.3	МОДЕЛИРАЊЕ МОДЕЛА ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ	83
3.3.1	Моделирање утицаја клаћења терета на носећу конструкцију	84
3.3.2	Математички модел порталне дизалице	86

4. ВЕРИФИКАЦИЈА ДОБИЈЕНИХ ТЕОРИЈСКИХ ВРЕДНОСТИ ПРИМЕНОМ СОФТВЕРСКЕ СИМУЛАЦИЈЕ

89

4.1	КОНАЧНО-ЕЛЕМЕНТНИ МОДЕЛ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТИПА N	90
4.2	КОНАЧНО-ЕЛЕМЕНТНИ МОДЕЛ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТИПА X	91

5. РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

92

5.1	ПОЛАЗНЕ ПОДЛОГЕ И ПОДАЦИ	92
5.2	АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА СТРЕЛЕ	95
5.2.1	Фреквентни одзив	95
5.2.2	Осциловања терета	95
5.2.2.1	Утицај брзине и убрзања портала	96
5.2.2.2	Утицај дужине ужетног система	96
5.2.3	Динамички моменти	97
5.2.3.1	Утицај брзине и убрзања портала	99
5.2.3.2	Утицај дужине ужетног система	100

5.3	АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА Н	102
5.3.1	Модална анализа	102
5.3.2	Динамичка померања	104
5.3.2.1	Модел не укључује пригушење у носећој конструкцији	104
5.3.2.2	Модел укључује пригушење у носећој конструкцији	107
5.3.2.2.1	Основни модел пригушења	107
5.3.2.2.2	Утицај пригушења	109
5.4	АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА Х	111
5.4.1	Модална анализа	111
5.4.2	Динамичка померања	113
5.4.2.1	Модел не укључује пригушење у носећој конструкцији	113
5.4.2.2	Модел укључује пригушење у носећој конструкцији	116
5.4.2.2.1	Основни модел пригушења	116
5.4.2.2.2	Утицај пригушења	118
6.	ЗАКЉУЧАК	119
	ЛИТЕРАТУРА	123

1

УВОДНА РАЗМАТРАЊА

Споменици материјалне културе који су откривени као резултат бројних археолошких истраживања непобитно сведоче да почетак примене дизаличних уређаја досеже све до древних цивилизација [1]. Градитељи старог Рима и Египта су простим средствима обављали послове подизања и премештања терета на велике висине и растојања. 1330. год. изграђена је обртна дизалица, која је очувана до данас [1]. Ова дизалица се погонила применом млина са точковима преко којих се обртало вратило за намотавање ланца за подизање терета. Током наредних векова упоредно са општим развојем технике развијала се и дизалично-транспортна техника. Данас, нема области индустрије у којој се не примењују транспортне машине (машине прекидног и машине непрекидног транспорта).

Улога механизације у привреди је велика. Високи темпо развоја привреде у свету и све већи раст промета робе захтева стално усавршавање средстава и метода премештања и ускладиштења терета на бази широког продора комплексне механизације и аутоматизације свих техничких процеса и укидања тешког ручног рада [1]. До данас је развијен велики број врста конструкција дизаличних машина у зависности од намене. У механизацији транспорта битну улогу имају портално-обртне дизалице. Дизалице представљају средства са цикличним дејством која су намењена транспорту (претовару) расуте и коадне робе у оквиру ограниченог радног простора, који је одређен конструктивним карактеристикама дизалице. При раду дизалица у реализацији транспортног процеса доминантне су операције подизања и спуштања терета.

Портално-обртне дизалице су један од доминантних типова дизаличних машина односно један од најкоришћенијих средстава претоварне механизације. Оне су веома значајне са аспекта реализације логистичких процеса. Основна намена им је обављање транспорта на отвореном простору. Базична конфигурација носеће конструкције (портала) у вертикалној равни има облик "П" рама. Најпознатији светски произвођачи порталних дизалица су Koncranes, Liebherr, Mohr, РТО, Drackar, Jindou Machinery и др. Једини домаћи произвођач порталних дизалица у светским размерама је Гоша-Фом из Смедеревске Паланке.

Данас, код проучавања и пројектовања савремених конструкција дизалица битно место има динамичка анализа. Динамика је посебно присутна код портално-обртних дизалица.

Сагласно предмету дисертације у оквиру уводног поглавља се разматрају следеће две уводне целине:

1. Увод у основе проблематике порталних дизалица, и
2. Увод у проблематику динамике порталних дизалица.

1.1 УВОД У ОСНОВЕ ПРОБЛЕМАТИКЕ ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА

1.1.1 Основне напомене и принцип рада

У ширем смислу, портално-обртне дизалице спадају у групу дизаличних машина односно машина прекидног транспорта. У овој групи оне представљају једну од основних врста машина. У ужем смислу, портално-обртне дизалице се могу сврстати у групу дизалица за реализацију логистичких процеса.

Са историјског аспекта, порталне дизалице су настале за потребе транспорта сировина и готових производа у претоварним терминалима и великим индустријским складиштима. Портално-обртне дизалице су се показале као веома погодне за претовар комадне и расуте робе у речним и поморским лукама.

Портално-обртне дизалице су један од најстаријих конструктивних облика дизаличних машина, чије је увођење започело још на почетку овог века. Оне се састоје од просторног крутог рама (портала) и обртне платформе са покретном стрелом. Портал се изводи са три и четири ноге. Код лаких портално-обртних дизалица статички одређених, портал је обично са три ноге, док се код малих распона потрала (6 [m]) и велике носивости портали граде са четири ноге.

Портал (носећа конструкција) дизалице у већини случајева премошћава саобраћајне површине по којима се крећу копнена превозна средства (друмска и железничка) тако да се процес директног претовара реализује цикличним понављањем промене дохвата стреле дизалице и ротације обртне надградње, а код индиректног претовара роба се одлаже на доку или прихвата приколицама и тракторима и одвози у складишта.

Намена портално-обртне дизалице је подизање/спуштање и циклични транспорт терета у радној зони порталног крана на отвореном простору.

На слици 1.1 је приказана је једна од најчешћих конструкција портално-обртних дизалица.

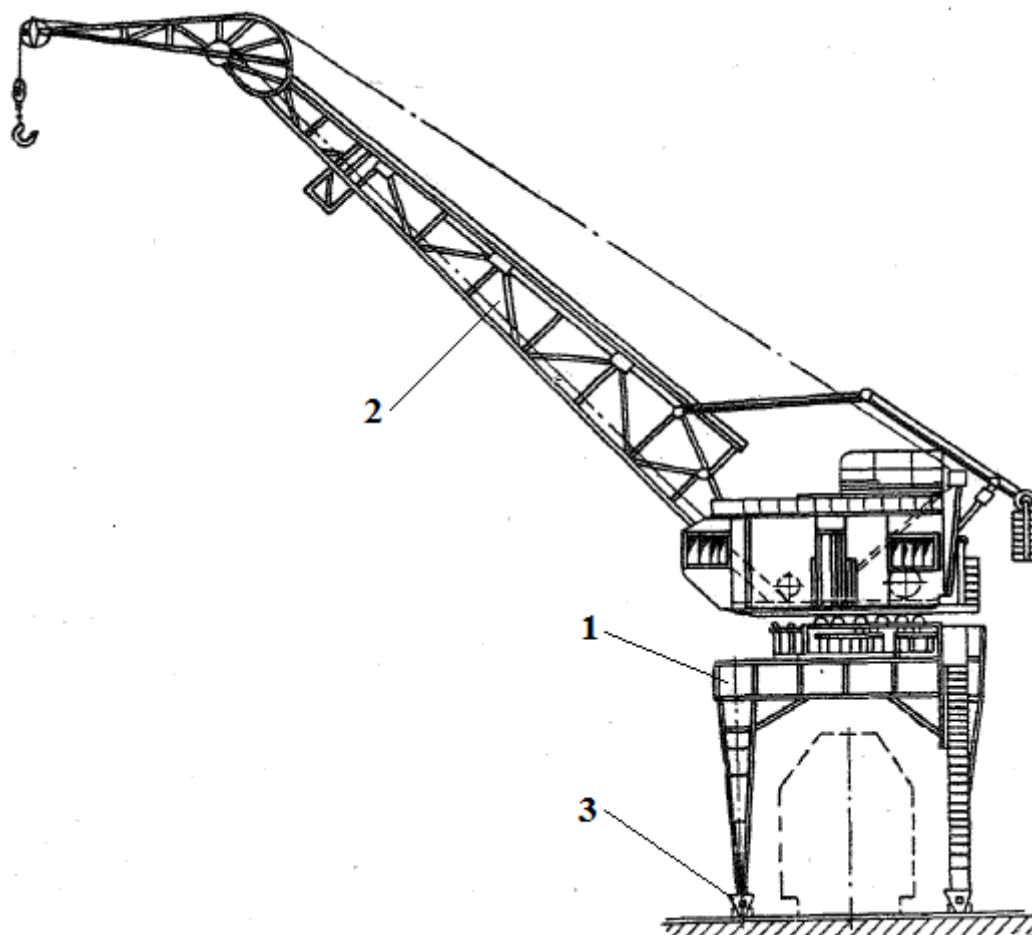
Главни подсистеми порталне дизалице су:

1. носећа конструкција (портал) са точковима,
2. обртна стрела, и
3. погон кретања дизалице (портала).

Носећа конструкција је подсистем дизалице који се састоји од одговарајућих подструктурних делова. Носеће конструкције (портали) портално-обртних дизалица се најчешће израђују од челика, према стандардима који се односе на потребну чврстоћу, стабилност, трајност и сигурност при раду. Портал ове дизалице може бити изведен од: решеткастих носача, челичног лима завареног у облику кутије и од цеви. Порталне-обртне дизалице се најчешће изводе са четири или са три ослонца. Решење са четири ослонца се примјењује чешће из разлога веће стабилности дизалице.

Обртна стрела представља подсистем портално-обртне дизалице који има могућност обртања за 360 [°] и променљив дохват стреле ($R_{min} \dots R_{max}$). Основне компоненте овог подсистема су механизам за обртање, механизам за промену дохвата стреле и механизам за дизање терета.

Погон кретања дизалице (портала) је најчешће електромоторни. Другим речима, код порталних дизалица је најраспрострањенији електрични погон са једносмерном и наизменичном струјом. Пренос снаге са електромотора на погонске тачкове се остварује преко редуктора. Број погонских тачкова је 25...100 [%] од свих тачкова [1].



Слика 1.1 Портално-обртна дизалица

1- портал, 2- обртна стрела, 3- погон кретања дизалице (портала)

Принцип рада портално-обртних дизалица је заснован на раду њених механизма. Механизми портално-обртних дизалица, као сложених машина, служе за извођење више различитих кретања дизалице. Процес рада портално-обртне дизалице обично се остварује помоћу четири самостална механизма, и то механизма за дизање и спуштање терета, механизма за кретање дизалице (портала) по шинама, механизма за окретање платформе дизалице и механизма за промену дохвата стреле дизалице. По правилу, ови механизми могу радити независно једни од других. Међутим, иако су сви погони независни један од другог, квар било ког механизма често онемогућава рад целе дизалице и практично постају неупотребљиви и остали механизми дизалице.

Техничке карактеристике дизалице представљају техничке податке који одређују намену исте.

Прву групу техничких података чине основни технички подаци порталне дизалице, и то су:

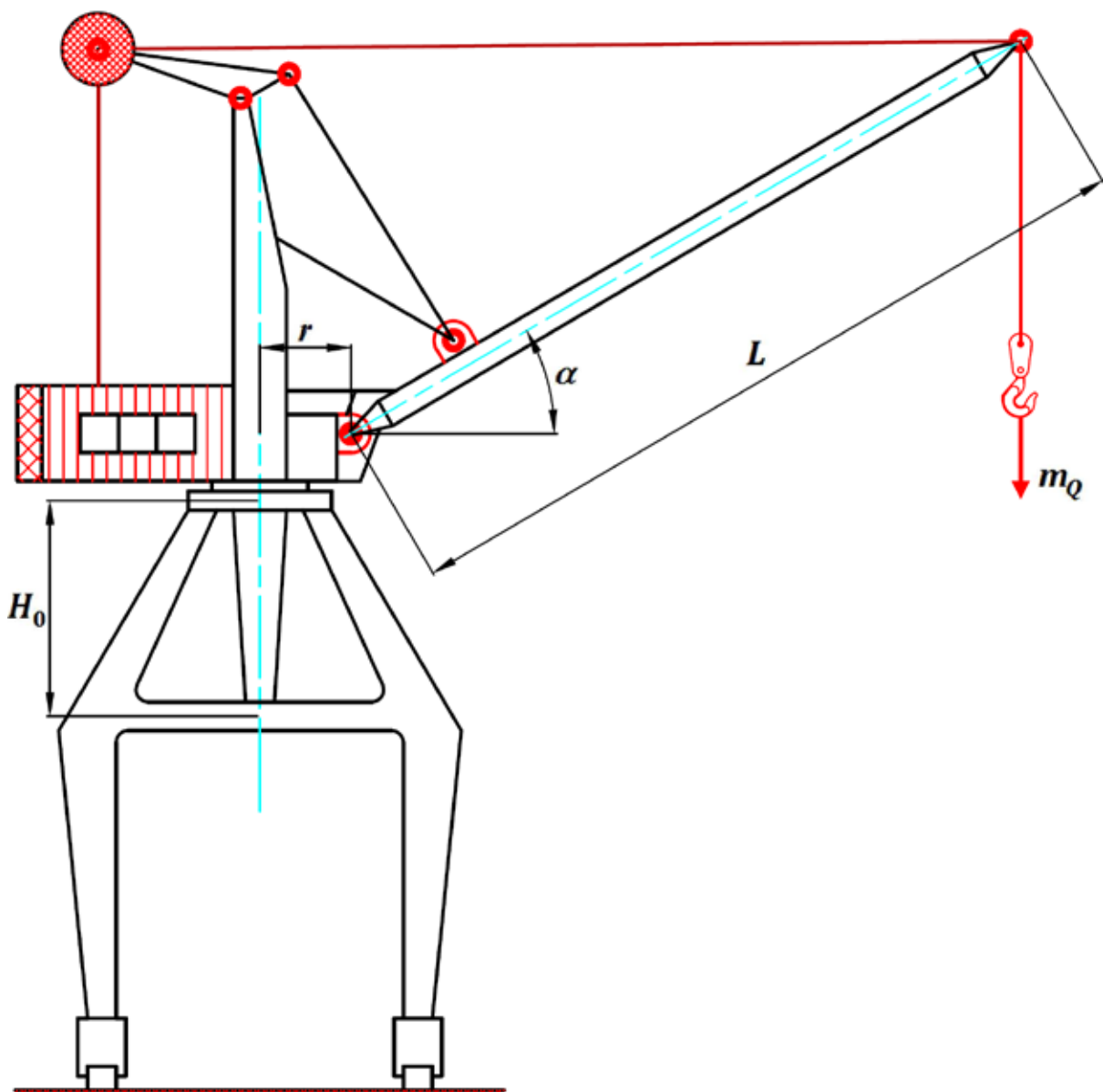
- носивост, и
- главне мере дизалице (распон између ногу, висина дизања и дохват).

У групи дизалица са стрелом, портална дизалица има одређене предности као што су: велики дохват стреле, велика носивост, велике брзине дизања и спуштања терета и итд.

Носивост портално-обртних дизалица је у опсегу од 32...400 [kN].

Максимална висина дизалице са подигнутом стрелом је у границама од 40...60 [m].

На слици 1.2 је приказана скица портално-обртне дизалице са приказаним главним мерама. Овај тип дизалице ће бити објекат разматрања у наставку.



Слика 1.2 Скица порталне дизалице

Другу групу техничких података представљају технички подаци порталне дизалице који су битни за дефинисање циклуса операција (брзине радних кретања), и то су:

- брзина кретања портала,
- брзина промене угла стреле (дохвата),
- брзина дизања.

Препоручене брзине радних кретања су дате у табели 1.1.

Табела 1.1 Брзине радних кретања

Брзина радног кретања		Вредност
Брзина кретања портала, v_{por} [m/min]		20...25
Брзина промене угла стреле (дохвата), v_{st} [m/min]		40...90
Брзина дизања, v_d [m/min]	За рад са куком (комадна роба)	40...63
	За рад са грабилицом (расута роба)	40...80
Број обртаја платформе, n_p [o/min]		1...2

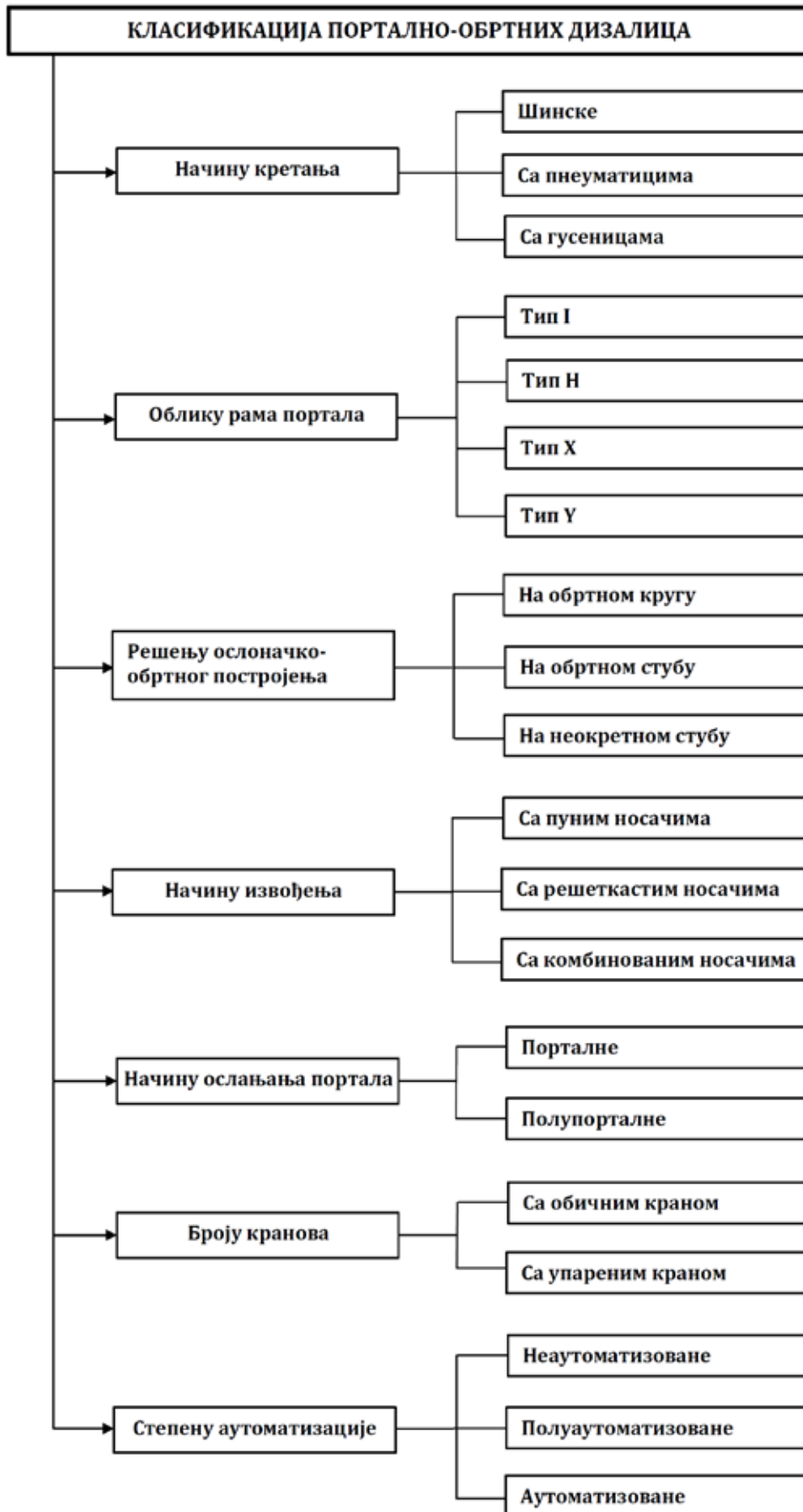
При пројектовању порталних дизалица обавезна је статичка анализа носеће конструкције. Потреба за динамичком анализом носеће конструкције порталних дизалица је већа са растом перформанси. Такође, оптимизација носеће конструкције порталне дизалице добија на значају са порастом перформанси.

Основне подлоге о порталним дизалицама (носећа конструкција, стрела, оптерећења и др.) налазе се у литератури [1...4].

1.1.2

Класификација

Са једне стране, у литератури постоје класификације порталних дизалица, које се разликују од аутора до аутора. Са друге стране, произвођачи порталних дизалица имају своје класификације порталних дизалица. На основу прегледа постојећих класификација порталних дизалица и најновијих података произвођача истих дизалица, аутор овог рада даје предлог могуће класификације порталних дизалица, слика 1.3.



Слика 1.3 Предлог могуће класификације порталних дизалица

О порталним дизалицама из дате класификације у наставку ће бити дате основне напомене и илустрације.

Са слике 1.3 се види да се према првом груписању порталне дизалице деле према начину кретања дизалице по терену.



а)



б)



в)

Слика 1.4 Порталне дизалице са аспекта начина кретања
а) шинска дизалица, б) дизалица са пнеуматичима, в) дизалица са гусеницама

Шинске порталне дизалице (Rail Mounted Gantry) су класичне порталне дизалице, код којих се цела дизалица креће по шинама, што значи да је предвиђена за транспорт терета на унапред одређеном простору. Ове порталне дизалице имају највећи капацитет. Пример једне шинске порталне дизалице је приказан на слици 1.4.а.

Порталне дизалице са пнеуматичима (Rubber Tired Gantry), слика 1.4.б, су мобилне порталне дизалице, чије се кретање остварује преко пнеуматика. Ове дизалице се мање користе од шинских дизалица. Предност ових дизалица се огледа у њиховој мобилности током транспорта, односно у могућности попречног кретања у складишном простору заокретањем пнеуматика до ± 90 [°]. За исти складишни простор оне имају мање габаритне димензије од шинских дизалица.

Порталне дизалице са гусеницама, слика 1.4.в, су мобилне порталне дизалице, чије се кретање остварује преко гусеница. И ове дизалице се мање користе од шинских дизалица. Ове дизалице имају већу мобилност током транспорта у односу на шинске дизалице, али имају мању мобилност у односу

дизалице са пнеуматицима. Као и дизалице са пнеуматицима, за исти складишни простор оне имају мање габаритне димензије од шинских дизалица.

Према другом груписању, порталне дизалице се деле према облику носача портала у хоризонталној равни.

Портална дизалица са носачем облика I је основни и најпростији тип порталне дизалице, са аспекта облика носача у хоризонталној равни. Типичан пример дизалице основног типа је приказан на сликама 1.4.а и 1.5.а.

Портална дизалица са носачем облика H су дизалице чији се носач састоји из једног подужног носача и два чеона носача, слика 1.5.б.

Портална дизалица са носачем облика X су дизалице чији се носач састоји из четири дијагонална носача, слика 1.5.в.

Портална дизалица са носачем облика Y су дизалице чији се носач састоји из једног подужног носача и два дијагонална носача, слика 1.5.г.



а)



б)



в)



г)

Слика 1.5 Порталне дизалице са аспекта облика конструкције
а) тип I, б) тип H, в) тип X, г) тип Y

Треће груписање, обухвата порталне дизалице које се деле према конструкционом решењу ослоначко-обртног постројења. Овде се дају само основне напомене везане за типове дизалица које се односе на ово груписање, док је више детаља дато у [1...4].

Портална дизалица на обртном кругу је дизалица код које је ослоначко постројење на обртном кругу. Пример порталне дизалице са овим решењем ослањања приказан је на сликама 1.4.в и 1.5.б. Код овог начина ослањања постоје два конструкциона типа, и то са точковима и са куглицама или ваљцима.

Портална дизалица на обртном стубу представља дизалицу код које обртни стуб представља заједнички део са обртним делом дизалице. Порталне дизалице са овим начином ослањања приказане су на сликама 1.5.в и 1.5.г.

Портална дизалица на необртном стубу има карактеристику да неокретни стуб представља продужетак носеће конструкције односно портала око кога се обрће обртни део дизалице. Примери порталних дизалица овог типа приказани су на сликама 1.4.а и 1.5.а.

Даље, према четвртном груписању, порталне дизалице се деле према начину извођења носеће конструкције.

Портална дизалица са пуним носачима је конструкционо решење порталних дизалица које се најчешће изводи. Код ових дизалица, пуни носачи носеће конструкције имају начешће кутијасте попречни пресек. Поред овог попречног пресека пуног носача носеће конструкције присутни су још стандардни профили и цевсти профли. Од стандардних профила се највише користи I – профил, и то као главни носач (самостално или ојачан другим профилима). Цевсти профили се најчешће користе за израду конструкције еластичне ноге. Претходно приказане конструкције порталних дизалица су уједно и порталне дизалице са пуним носачима.

Портална дизалица са решеткастом носећом конструкцијом је најређе конструкционо решење порталних дизалица, слика 1.6.а.

Портална дизалица са комбинованом носећом конструкцијом је дизалица код које је главни носач или хоризонтални рам израђен од пунх носача а ноге као решетке, слика 1.6.б. Комбинована варијанта решења носеће конструкције порталне дизалице има нешто већу примену од решеткасте.



а)



б)

Слика 1.6 Порталне дизалице са аспекта начина извођења носеће конструкције
а) решеткаста, б) комбинована

Још даље, према петом груписању, порталне дизалице се деле према начину ослањања на обе стране носеће конструкције.

Порталне дизалице, са аспекта ослањања обе стране носеће конструкције, су дизалице које се са обе стране ослањају на шину постављену на фундамент или директно на фундамент. Све претходно приказане дизалице припадају овој групи дизалица.

Полупорталне дизалице су дизалице код којих се једна страна ослања на шину постављену на фундамент или директно на фундамент, док се друга страна ослања на шину постављену на надвожњаку или је дизалична стаза подигнута на стубовима, односно на носачима у зиду грађевинског објекта. Маневарска способност полупорталних дизалица је слабија у односу на порталне, па је извођење ових дизалица ређе. Неки примери полупорталних дизалица су приказани на слици 1.7.



Слика 1.7 Полупортална дизалица

Према шестом груписању дате класификације, порталне дизалице се деле према броју кранова на обртном постољу конструкције.

Порталне дизалице са обичним краном, су дизалице које имају један кран на обртној платформи. Све до сада илустроване порталне дизалице припадају групи дизалица са обичним краном.

Порталне дизалице са упареним краном су дизалице које имају два крана на обртној платформи. Кранови су смештени на бази-обртној платформи која се може окретати око своје осе (у кругу од $360 [^\circ]$) а такође и сами кранови могу се појединачно окретати на платформи, тако да могу независно радити приликом операција на различитим складиштима. Стреле оба крана се могу вертикално померати горе-доле а окретањем крана на бази или комплетне базе стрела се окреће хоризонтално (лево или десно). Један пример дизалице са упареним краном је приказан на слици 1.8.



Слика 1.8 Портална дизалица са упареним краном

На крају, према задњем-седмом груписању, порталне дизалице се деле према степену аутоматизације рада. Степен аутоматизације порталних дизалица зависи од њихове намене. Компјутеризација и микро-чипови (на пример чип за праћење контејнера) завладали су и у транспортним пословима. Актуелно стање ствари у аутоматизацији дизалица се разматра у раду [5].

Неаутоматизоване порталне дизалице су дизалице код којих се командовање свим транспортним радњама остварује искључиво преко руковаца са пода или из кабине.

Полуаутоматизоване порталне дизалице су дизалице код којих су аутоматизоване поједине транспортне радње. Код њих се учешће човека не може искључити. Полуаутоматизоване порталне дизалице су неопходне код железничких и лучких терминала великог капацитета. На примеру руковања контејнерима, појам полуаутоматизације значи да се све транспортне радње на складишту обављају аутоматски, док се у процесу претовара контејнера, у тренутку када се контејнер нађе до 1 [m] изнад возила, укључује и руковаоц дизалице.

Аутоматизоване порталне дизалице су дизалице код којих се све транспортне радње извршавају потпуно аутоматски. Аутоматске порталне дизалице су неопходне код лучких и железничких терминала великог капацитета. Аутоматизована портална дизалица опслужује контејнере из складишта луке, који су истоварени са брода и складиштени у блоковима. Позиционирање контејнера у блоку се обавља потпуно аутоматски. Прво, избор локације и управљање се врши ситемом који управља процесима складиштења контејнера (TOS). У току позиционирања контејнера радњама се управља системима. Затим, на основу информација од сензора, камера, ласера и мерних уређаја на стрели и хватачима контејнера, управљачки системи врше позиционирање терета са толеранцијом од ± 5 [cm] (ABB Automation подаци). Данас, развијена су софтверска решења за виртуелну симулацију транспортног тока контејнера у лучким терминалима. Један пример такве симулације је приказан на слици 1.9.



Слика 1.9 Виртуелна симулација транспортног тока у контејнерском терминалу (ТВА)

1.1.3

Значај транспорта порталним дизалицама

Порталне дизалице имају велики значај у транспорту материјала који се одвија на отвореном простору. Значај порталних дизалица за контејнерске терминале је у корелацији са великим значајем контејнерског транспорта у светској економији.

У ширем смислу, порталне дизалице имају значајну употребу свуда где се транспорт материјала одвија на отвореном простору.

У ужем смислу, још већи значај имају порталне дизалице које се користе на бродоградилштима и контејнерским терминалима у лукама. Наиме, транспорт код ова два објекта се не може замислити без порталних дизалица. Значај порталних дизалица за бродоградилшта произилази из чињенице да ове дизалице имају велике габаритне димензије и носивост у групи порталних дизалица. Значај контејнерског транспорта у свету са економског аспекта је у сталном расту, одакле директно произилази и значај порталних дизалица за контејнерске терминале. Такође, контејнерски транспорт је ефикасан, сигуран и чист.

1.1.4

Тренд развоја порталних дизалица

Данас порталне дизалице имају савремену конструкцију. Сваки подсистем порталне дизалице је осаврењен. Али за даљи развој порталних дизалица има још простора. У будућности се очекује даљи раст перформанси порталних дизалица.

Неки даљи правци развоја порталних дизалица су:

- повећање дохвата стреле,
- скраћивање циклуса операција транспорта,
- повећање брзина радних кретања (пре свега брзине портала)
- добијање лакших конструкција, односно конструкција са оптимизираним попречним пресецима и геометријом,
- развој флексибилних конструкција, и
- развој потпуно аутоматизованих порталних дизалица.

Како портално-обртне дизалице представљају битан систем у контејнерском транспорту и који је увек прилагођен захтевима купца, реално је очекивати даљи развој ових дизалица код највећих светских произвођача (Konecranes, Liebherr, Mohr, PTO, Drackar, Jindou Machinery и др.).

1.2

УВОД У ПРОБЛЕМАТИКУ ДИНАМИКЕ ПОРТАЛНИХ ДИЗАЛИЦА

Поједина подручја динамике конструкција, али је то присутно и у другим гранама науке, настала су после катастрофа или незгода у реалним условима, на објектима који су се срушили или тешко оштетили [6]. Неки примери су:

Пример 1: После катастрофе моста Tacoma Narrows 1940. год. почела је озбиљнија анализа утицаја ветра на конструкције, посебно аероеластична интеракција ветра и конструкција, односно, настало је инжењерство ветра у данашњем смислу.

Пример 2: Након потреса San Fernando 1972. год. и рушења степенишног торња болнице „Olive View“ услед судара са главном зградом болнице, почело се развијати подручје динамике конструкција, односно потресног инжењерства које се бави сударима зграда током потреса.

Пример 3: У Јапану је 1988. год. на мосту са косим кабловима код Нагоје (Meikonishi Bridge) дошло до прве уочене интеракције ветра са кишом и косих каблова и значајних резонантних вибрација каблова, срећом без рушења. При малој брзини ветра, од око 14 [m/s], при којој без кише нема никаквих вибрација каблова, у случају симултане кише и ветра дошло је до резонантних вибрација каблова са амплитудама од око 55 [cm].

Пример 4: На мосту Erasmus Bridge у Ротердаму 1996. год. уочена је појава резонантних вибрација каблова услед истовременог ветра (релативно мале осредњене брзине) и кише. Од тада се развија посебно подподручје инжењерства ветра: „rain-wind vibrations“.

Истраживање динамичког понашања конструкција је присутно у грађевинском инжењерству и машинском инжењерству. Из курса динамике конструкција неки релевантни примери стране литературе су [7...9], док се од домаће литературе издваја [10...13]. Конструкције различитих намена су изложене утицајима који су променљиви. Ови утицаји могу бити уобичајени, који су променљиви само у времену, нпр. [12, 14, 15], и утицаји помичног оптерећења, који су променљиви у времену и простору, нпр. [16...18]. Дејство ових утицаја на конструкције огледа се кроз појаву динамичких померања, брзина и убрзања конструкције.

1.2.1

Значај динамичке анализе порталних дизалица

У машинском инжењерству, значај овог проблема присутан је, пре свега, у области дизаличног инжењерства. Динамички прорачуни су веома значајни у пројектовању дизалица, које данас имају веома високе техничко-економске показатеље. Један од представника дизаличних машина, а које су и предмет овог рада, су портално-обртне дизалице. Портално-обртне дизалице представљају дизаличне машине са стрелом која је везана за портал и има могућност обртања за 360°. Ове дизалице су интересантне за динамичку анализу са аспекта високе носивости, са једне стране, и аспекта да имају пропорционално малу основу у односу на висину. Код портално-обртних дизалица, присутни су утицаји који су променљиви током времена (кретање дизалице и клаћење терета). Клаћење

терета много доприноси динамичком оптерећењу дизалица. Значај проблема клаћења терета је разматран и потврђен у радовима [14] и [19]. Такође, значај овог проблема је дефинисан у станарду [20]. Резултати динамичке анализе носећих конструкција су од значаја и за оптимизацију попречних пресека [21].

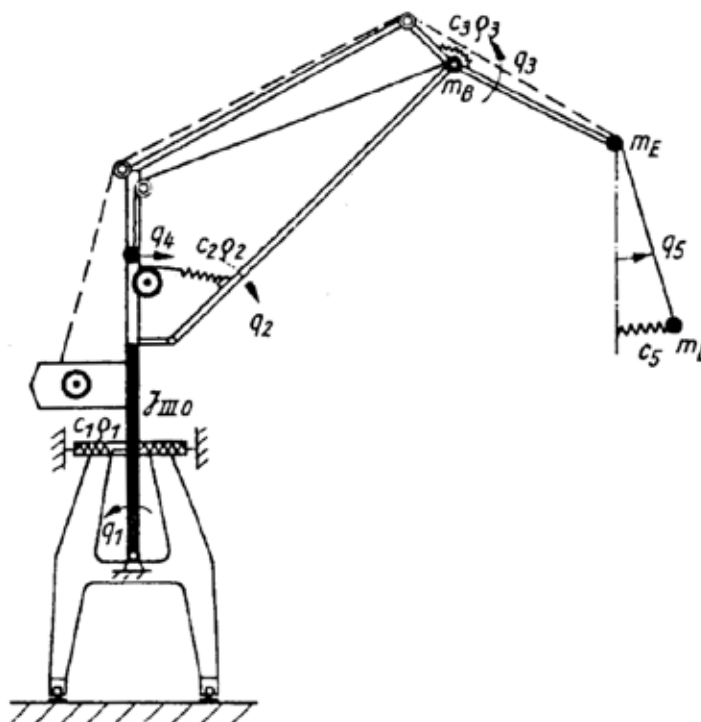
1.2.2

Радови из области динамике порталних дизалица велике носивости и других сличних дизалица

Предмет истраживања ове дисертације, у ширем смислу припада динамици конструкција, док у ужем смислу, припада проблематици утицаја кретања портала и осиловања терета порталне дизалице. Ради постављања одговарајућих подлога и израде плана истраживања даје се преглед релевантних истраживања из области динамике порталних дизалица велике носивости и других сличних дизалица.

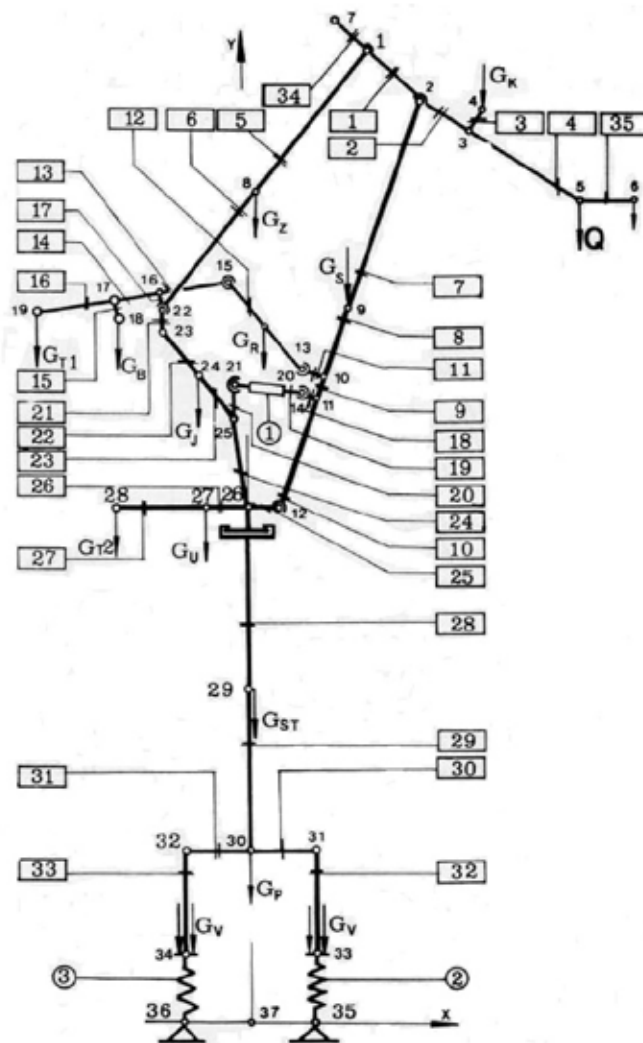
У првим радовима из области динамичке анализе портално-обртних дизалица разматрани су равански динамички модели [22] и [23].

У раду [22], Dresig је формирао равански динамички модел, слика 1.10. Приказани модел тежи да опише дизалицу сагласно њеном изгледу (нпр. са слике произилази шта је на моделу еластично и како се преставља). Другим речима, на моделу се визуелно препознаје шта је који део.



Слика 1.10 Динамички модел портално-обртне дизалице [22]

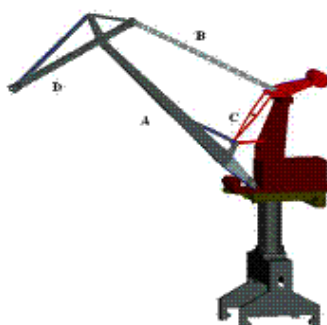
Јовановић, Радоичић и Милић су раду [23] истраживали динамичку стабилност портално-обртне дизалице. За потребе предметног истраживања аутори су формирали равански коначно-елементни модел портално-обртне дизалице, слика 1.11.



Слика 1.11 Коначно-елементни модел портално-обртне дизалице [23]

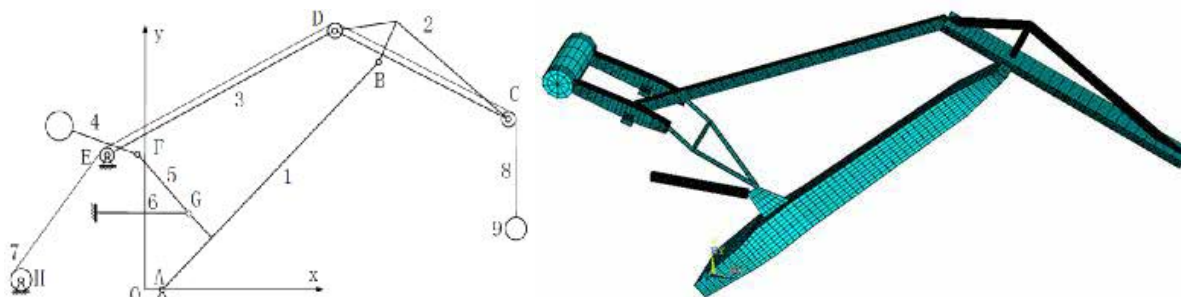
Аутор овог рада је пронашао мало радова са просторним динамичким моделима, који се баве проблематиком динамичког понашања портално-обртних дизалица. Неки релевантни примери су радови [24] и [25].

Sun и Li су у раду [24] моделирали портално-обртну дизалицу у CAD-CAE окружењу, слика 1.12. Портално-обртна дизалица је посматрана као целовита конструкција. Применом методе коначних елемената у CAD-CAE окружењу аутори су спровели динамичку анализу портално-обртне дизалице.



Слика 1.12 Коначно-елементни модел портално-обртне дизалице [24]

У раду [25], Zheng, Hu, Wu, Yi i Liu су моделирали коначно-елементни модел стреле портално-обртне дизалице, слика 1.13. Значи, акценат је дат на стрелу портално-обртне дизалице. Применом методе коначних елемената у софтверском решењу ANSYS је спроведена модална анализа формираног модела.

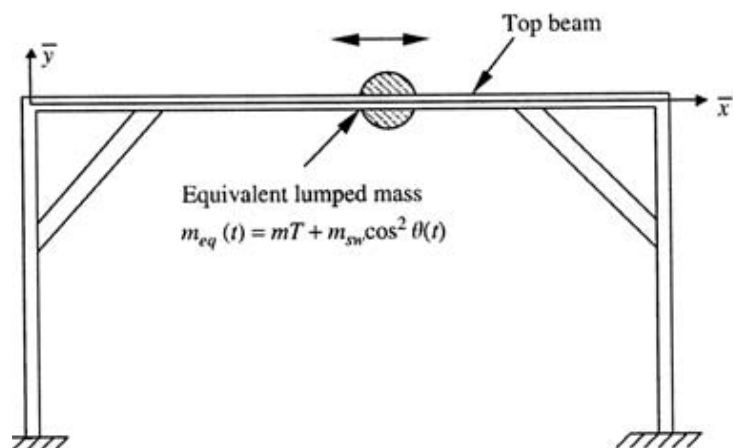


Слика 1.13 Коначно-елементни модел стреле портално-обртне дизалице [25]

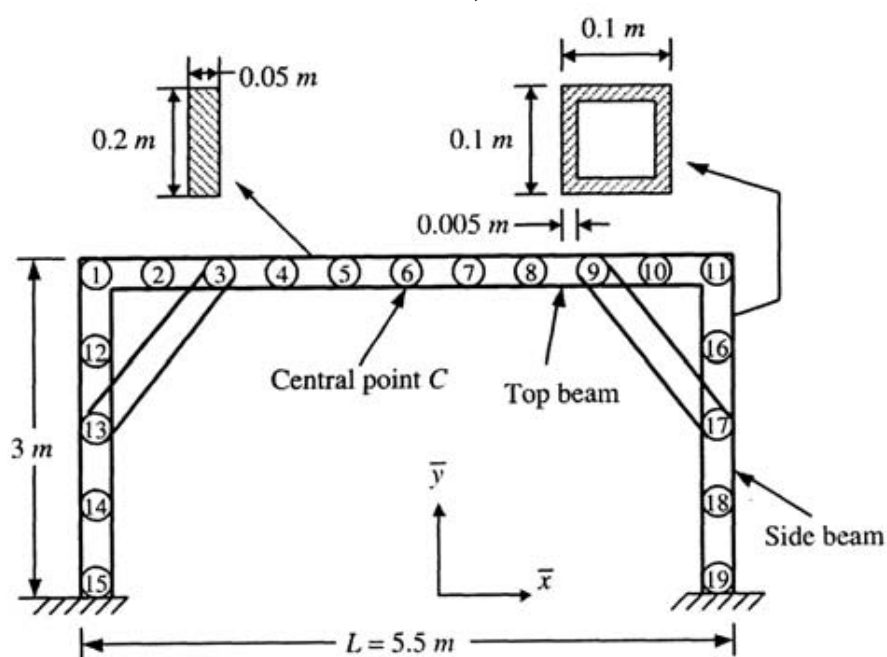
Због малог броја радова који се односе на портално-обртне дизалице, са аспекта одређене *аналогије носеће конструкције*, претрага усмерена на групу рамних дизалица. За ову групу рамних дизалица пронађен већи број радова. Углавном су радови везани за проблематику помичног оптерећења. Издвојено је пет радова [26...30], од којих су у два рада рамне дизалице моделиране раванским динамичким моделима, док су у три рада рамне дизалице моделиране просторним динамичким моделима.

Wu у раду [26], анализира утицај помичног оптерећења на динамички одговор носеће конструкције рамне дизалице, слика 1.14. Клађење терета се врши у равни ух. Утицај помичног оптерећења је уведен преко еквивалентне помичне масе, слика 1.14.а. На слици 1.14.б приказане су карактеристике КЕ модела носеће конструкције рамне дизалице.

У раду [27], Гашић, Зрнић и Милованчевић се баве проблематиком помичног оптерећења код рамних дизалица високих перформанси, слика 1.15. Аутори су усвојили *комбиновани приступ*, који подразумева примену методе коначних елемената у комбинацији са једначинама аналитичке механике, за формирање математичких модела рамне дизалице. Модел колица је разматран кроз неколико модела, и то: помична сила, помична маса, помични осцилатор и помични осцилатор са клатном. Сваки од 4 модела има своје динамичке карактеристике које профилишу динамички одговор носеће конструкције дизалице. Решења су добијена нумерички, методом директне интеграције, разматрањем раванског рамовског коначно-елементног модела носеће конструкције под дејством еквивалентног помичног оптерећења на основу постављеног система диференцијалних једначина другог реда са променљивим коефицијентима. На реалном примеру дизалице су одређени динамички одговори носеће конструкције за различите моделе колица.

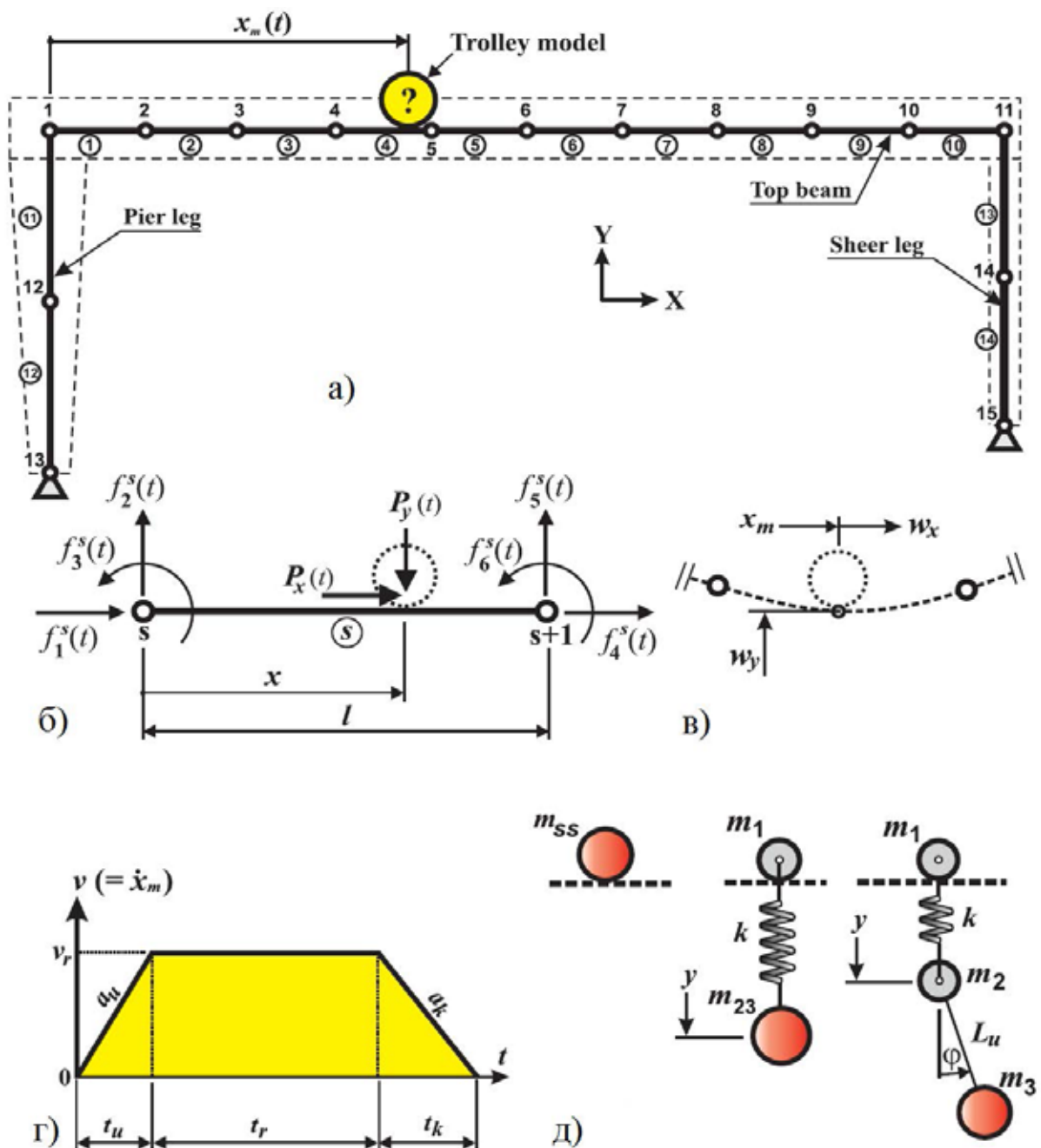


а)



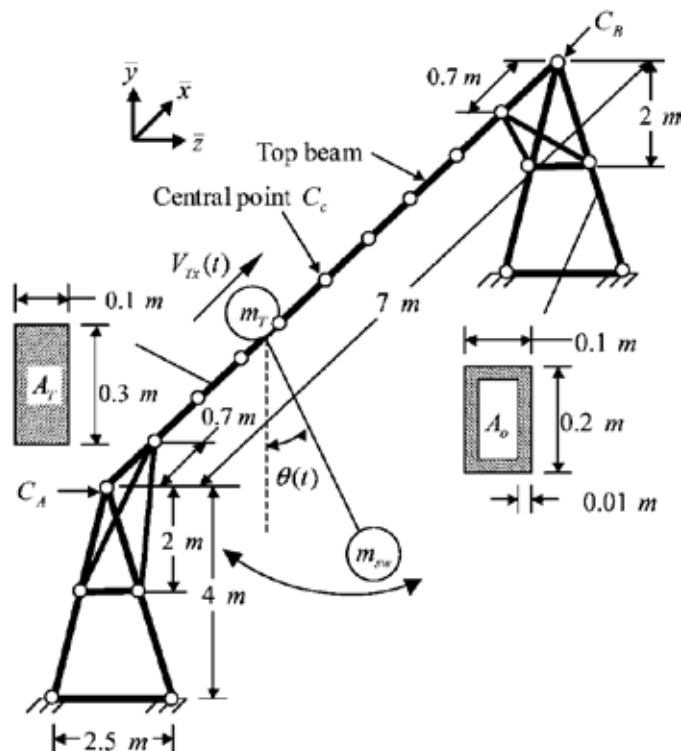
б)

Слика 1.14 а) Модел рамне дизалице, б) Карактеристике КЕ модела носеће конструкције [26]



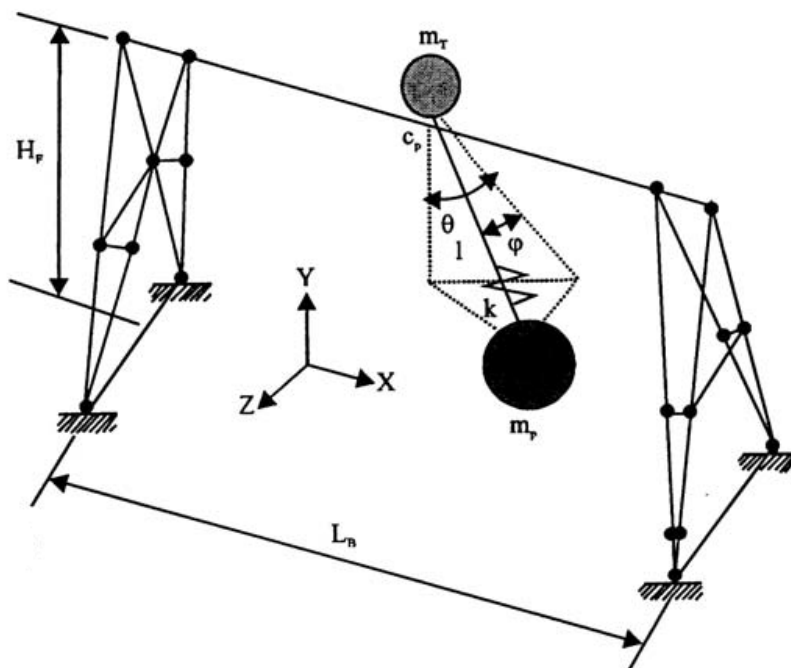
Слика 1.15 а) Коначно-елементни модел рамне дизалице, б) Еквивалентна чворна оптерећења елемента s од сила, в) Померања тачке контакта г) Профил брзине покретног оптерећења, д) Модели покретне масе [27]

У раду [28], Wu је истраживао динамички одговор носеће конструкције рамне дизалице побуђене помичним оптерећењем и клађењем терета у вертикалној равни yz . На слици 1.16 је приказан коначно-елементни модел разматране дизалице. Дизачична стаза носеће конструкције је моделирана са 10 елемента. Проблем помичног клатна је сведен на проблем помичне масе при чему је уведен појам еквивалентне помичне масе.



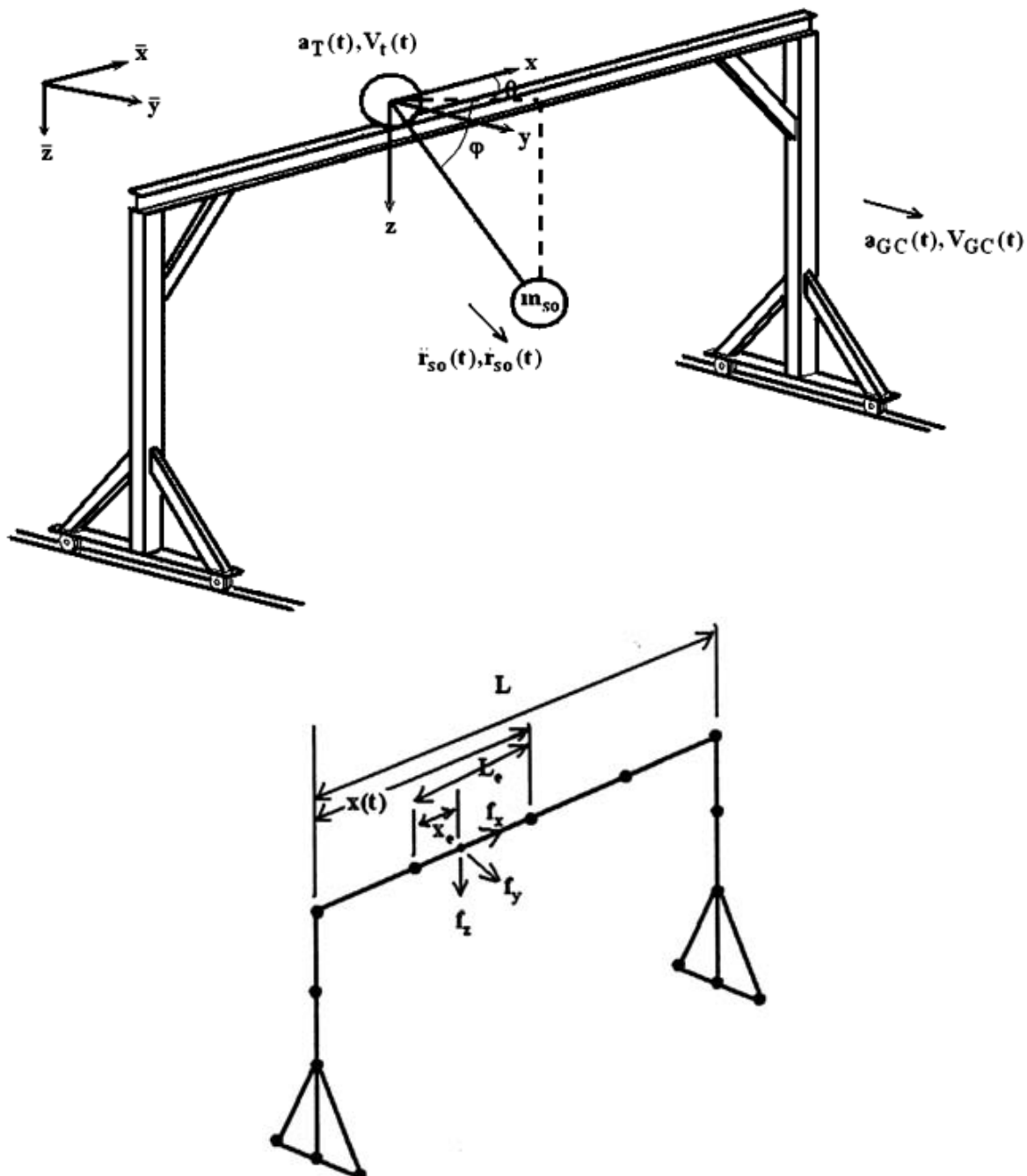
Слика 1.16 Коначно-елементни модел рамне дизалице [28]

Yazid, Parman и Fuad у раду [29], формирали су просторни динамички модел рамне дизалице, слика 1.17. У раду је претпостављено да су колица стационарна на средини распона, тако да овај рад припада области уобичајене динамичке анализе. За формирани модел аутори су разматрали клаћење терета и ужетног система и осцилације носеће конструкције. Клаћење терета се врши у простору XYZ.



Слика 1.17 Просторни динамички модел рамне дизалице са колицима на средини распона [29]

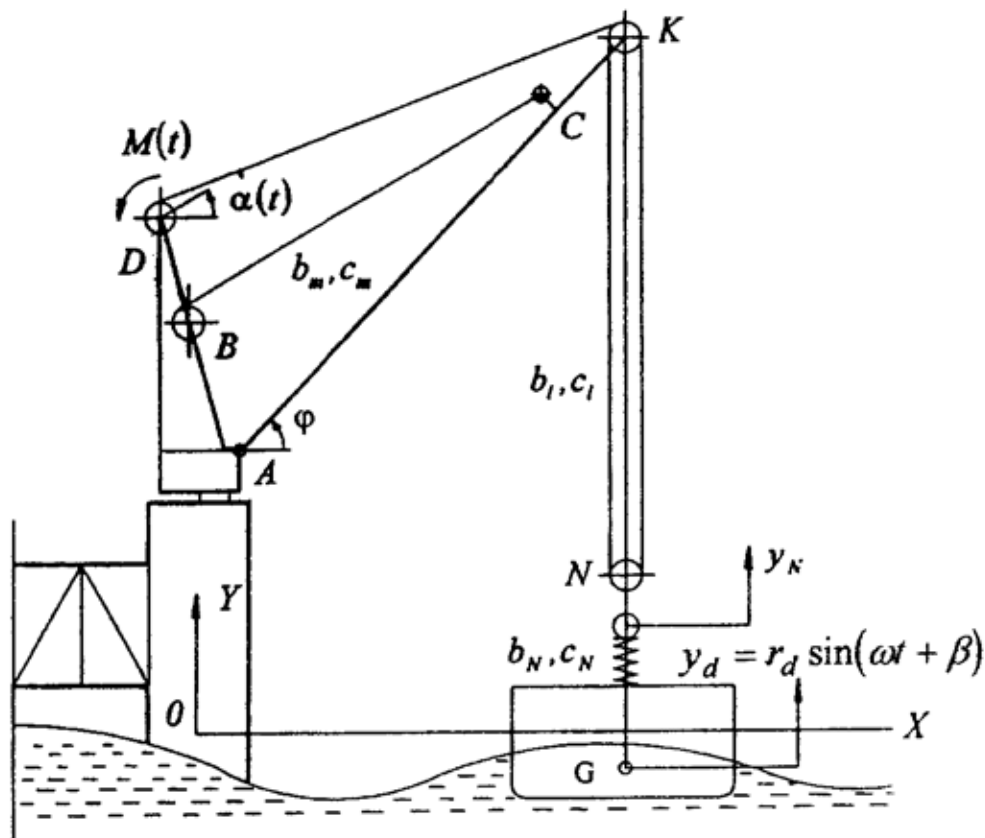
У раду [30] се анализира динамички одговор носеће конструкције рамне дизалице услед просторног клаћења терета, слика 1.18. Аутори рада (Younesian, Ghafoori и Sadeghpour), су увели одговарајуће изразе који произилазе из динамике терета. Коначно-елементни модел носеће конструкције, је моделиран тако што је дизачична стаза моделирана са 4 елемента, док су ноге рамне дизалице моделиране са 7 елемената. Формирани модел рамне дизалице укључује већи број параметара.



Слика 1.18 Модел рамне дизалице [30]

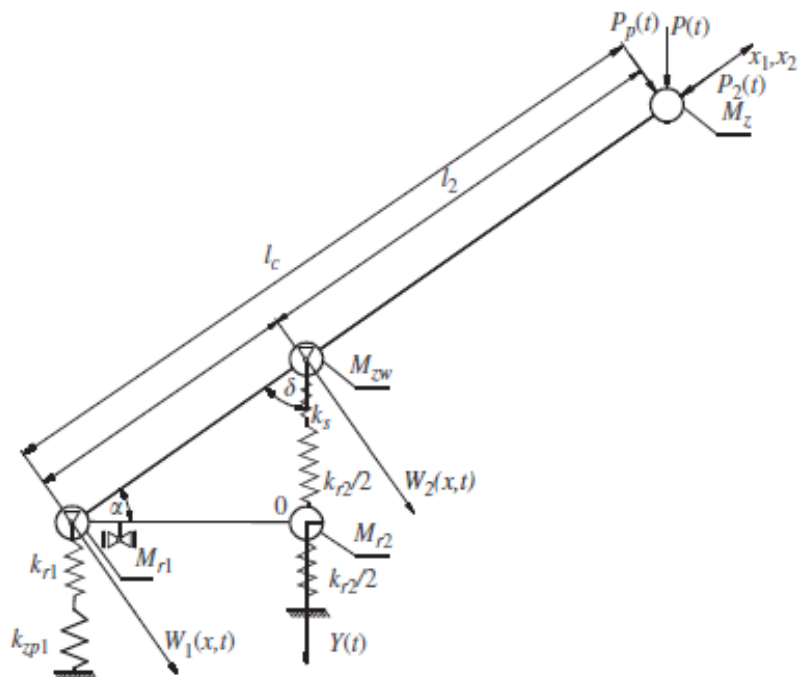
Даље, са аспекта *аналогије стреле* портално-обртних дизалица у односу на стреле осталих обртних дизалица, претрага је усмерена групу обртних дизалица. Прво је разматрана група динамичких модела [31...35], који се баве проблематиком динамичког понашања обртних дизалица.

Osinski i Wojsiech су раду [31] представили равански динамички модел пловне дизалице, слика 1.19. У модел су укључени екстремно неповољни услови. Рад се бави проналажењем оптималног обртног момента погона за дизање и оптималне брзине добоша за дизање. Илустрован је и одговарајући нумерички пример.



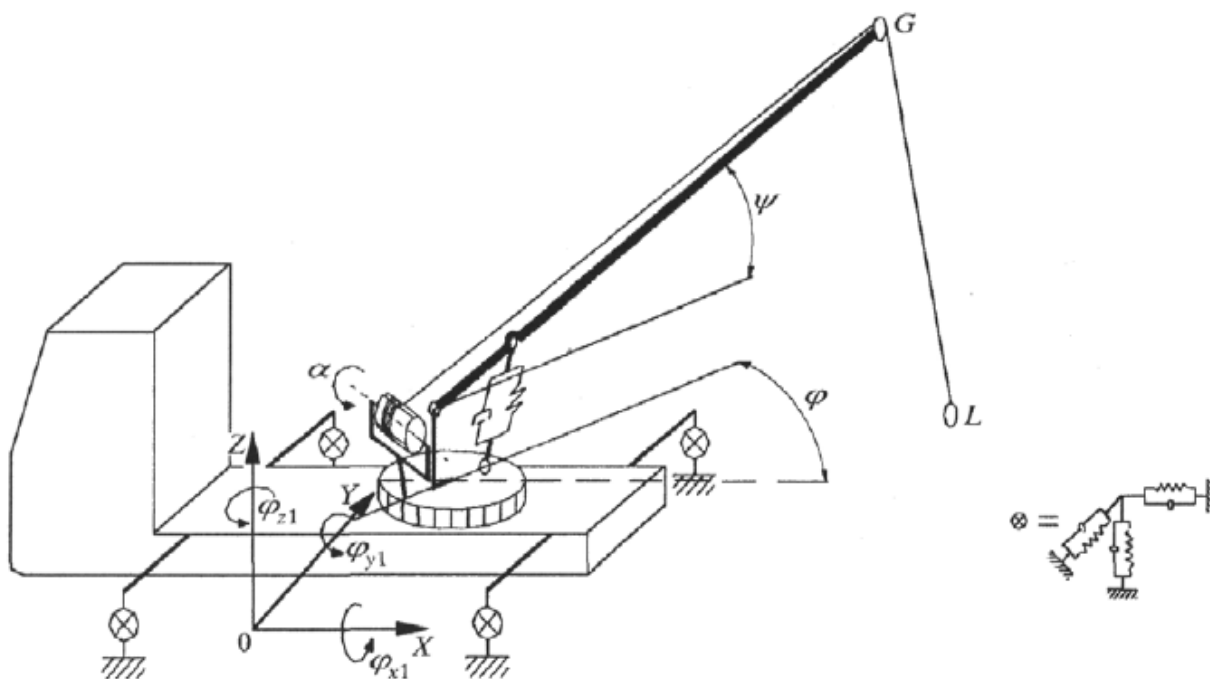
Слика 1.19 Модел пловне обртне дизалице [31]

У раду [32], Sochacki је представио равански физички модел телескопске стреле аутодизалице, слика 1.20. У раду је истраживан фреквентни одзив и испитивана динамичка стабилност разматране дизалице. Математички модел је формиран применом *Hamilton*-овог принципа. Добијене су једначине кретања и природни гранични услови. Дефинисане су криве зависности сопствених фреквенција при промени геометрије система. У раду је за разматране случајеве изведен закључак да за одређене параметре система (нагиб стреле и терет) постоји одређена дужина челичног ужета при којој систем може изгубити динамичку стабилност. У том смислу су за различите вредности нагиба стреле и терета дефинисане неповољне комбинације дужине телескопске стреле и челичног ужета које доводе до динамичке нестабилности формираног лабораториског модела аутодизалице.



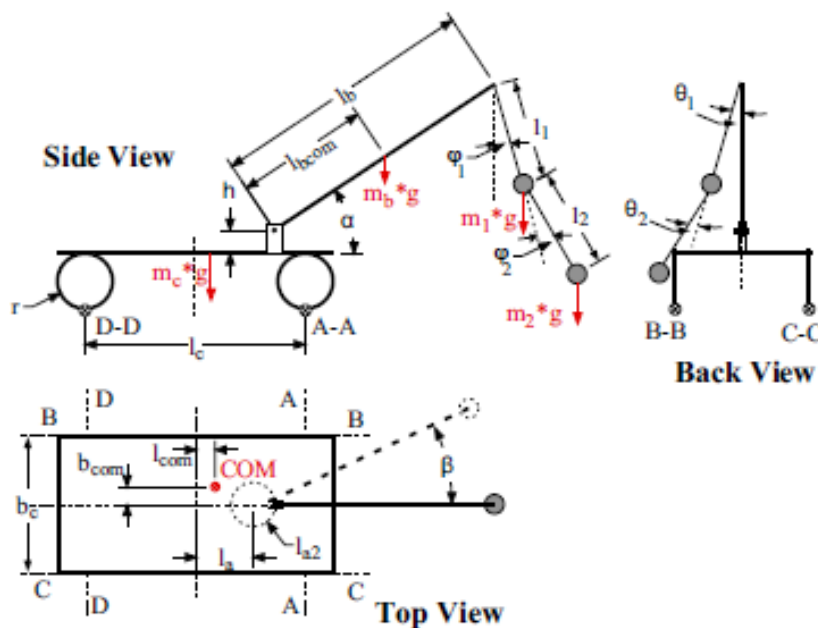
Слика 1.20 Физички модел за тестирање система [32]

Maczynski и Szczotka су у раду [33] у поставили два упоредна модела. У првом кораку су поставили аналитички тродимензионални динамички модел аутодизалице, слика 1.21. Модел укључује еластичност и пригушење у стабилизаторима и хидроцилиндру. Број степени слободе кретања зависи од сложености приступа предметном истраживању. Формиране су и решене једначине кретања постављеног модела. У другом кораку су формирали модел разматране дизалице у програмском пакету ADAMS. За изведено решење аутодизалице дат је упоредни приказ динамичких карактеристика за аналитички модел и модел у програмском пакету ADAMS.



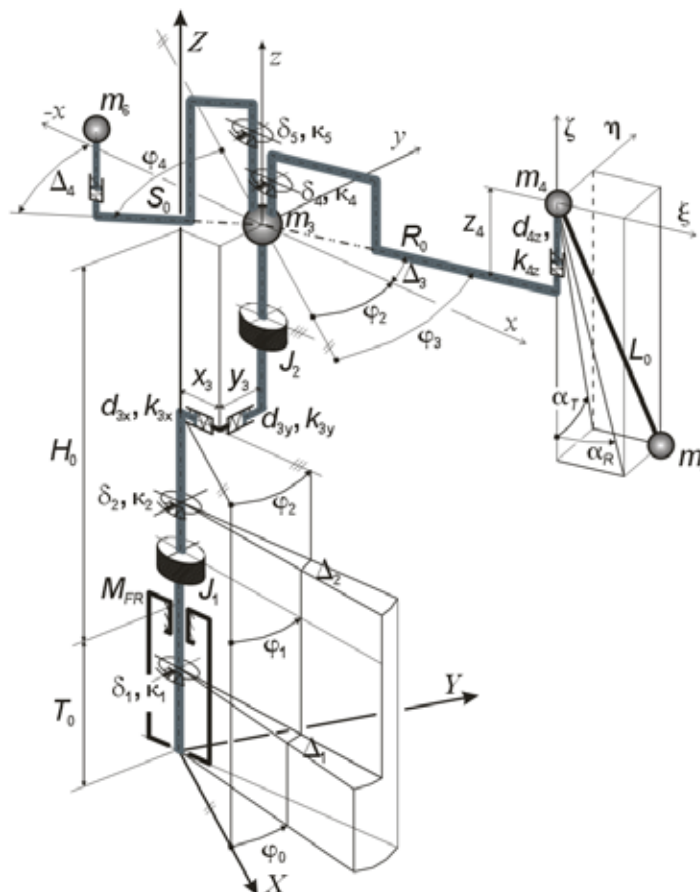
Слика 1.21 Модел аутодизалице [33]

У раду [34], Fujioka, Rauch и Singhose су испитивали динамичку стабилност мобилне дизалице са стрелом. На слици 1.22 је приказана скица разматране дизалице. Аутори су формирали три парцијална раванска динамичка модела. Стрела је моделирана као једноструко и двоструко клатно. Ослањање базе дизалице је моделирано са ослонцима који укључују еластичност и пригушење. Дат је упоредни приказ резултата за моделе са једноструким и двоструким клатном. За верификацију динамичких модела формиран је лабораторијски модел. Дат је упоредни приказ резултата за динамички модел и лабораторијски модел.



Слика 1.22 Шема аутодизалице са стрелом [34]

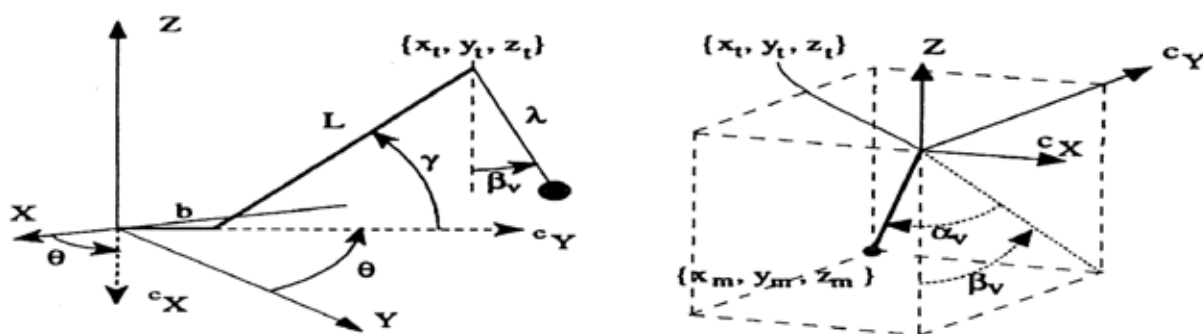
Мариновић, Спречић и Јерман у раду [35] су на вишемасеном моделу обртне дизалице испитивали просторно осциловање корисног терета, слика 1.23. Како би се постигла довољна тачност представљени модел се састоји од шест маса и процене за нелинеарну особину обртноггибања и нелинеарности преноса снаге. У обзир су узети и следећи параметри: еластичност, пригушење носеће конструкције, трење у главном лежају и отпор ваздуха. Добијени су углови љуљања терета и динамичке силе.



Слика 1.23 Модел обртне дизалице [35]

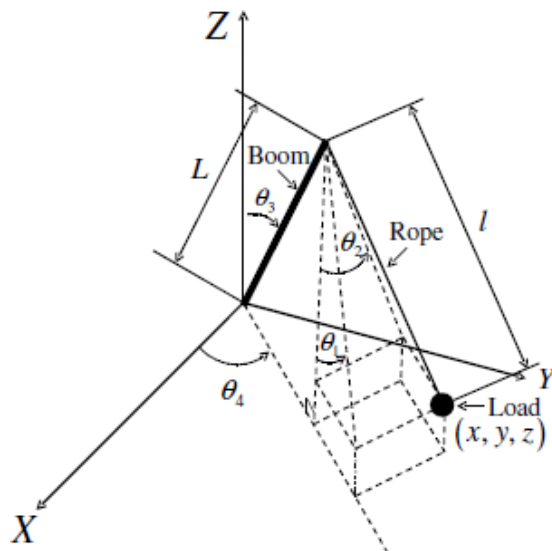
Затим је разматрана група динамичких модела, који се баве проблематиком управљања обртних дизалица [36] и [37].

У раду [36], Gustafsson је истраживао управљање обртне дизалице. У том смислу је формирао модел обртне дизалице (слика 1.24) и управљачки систем.



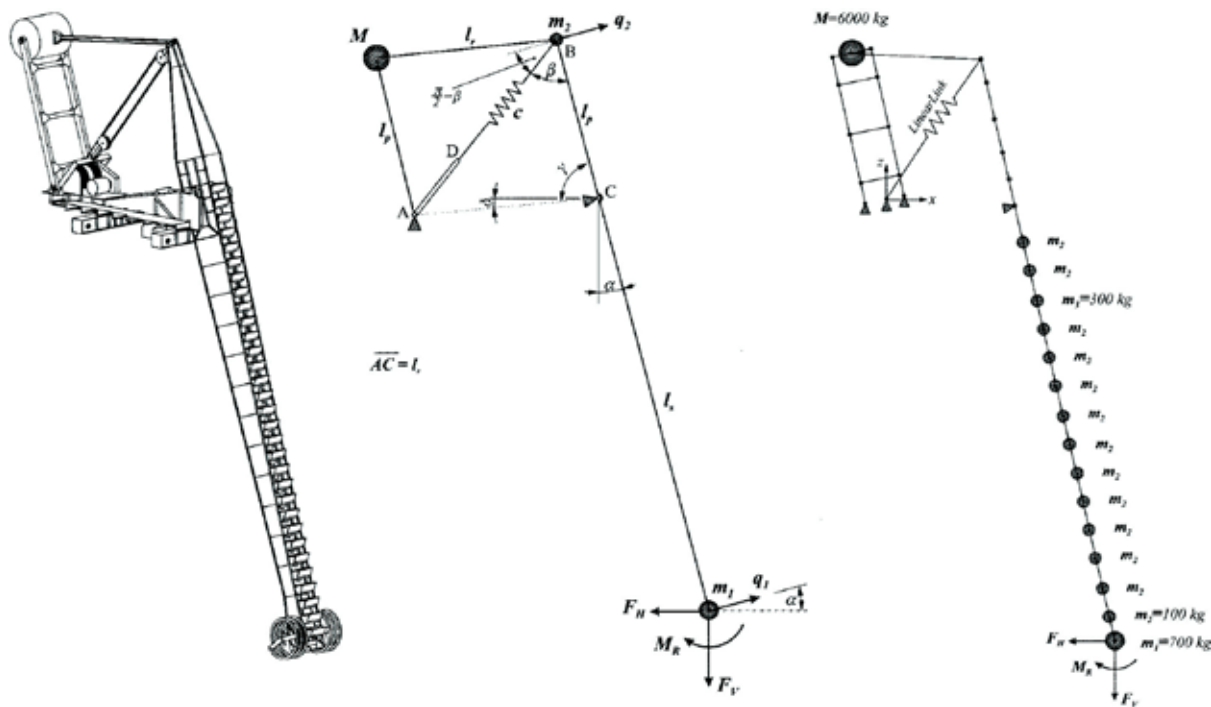
Слика 1.24 Модел обртне дизалице [36]

Рад [37] се бави проблематиком управљања обртне дизалице. За потребе предметног истраживања аутори Huimin, Naoki и Shigenori су формирали модел обртне дизалице (слика 1.25) и управљачки систем.



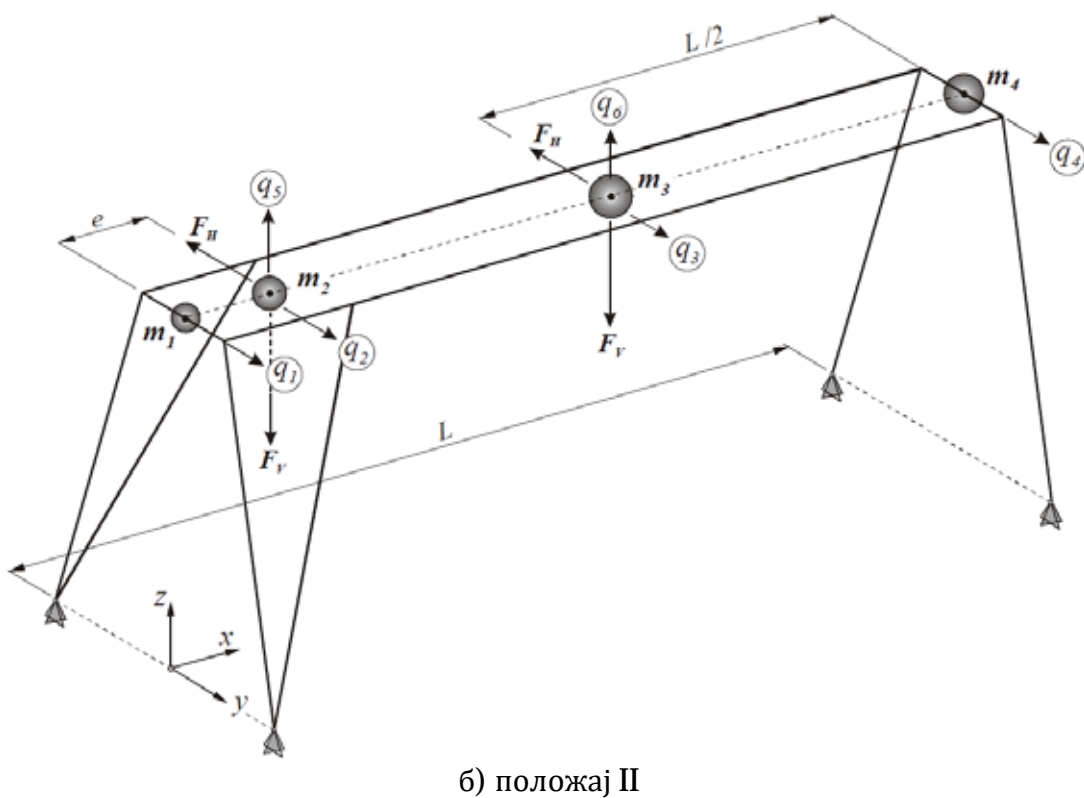
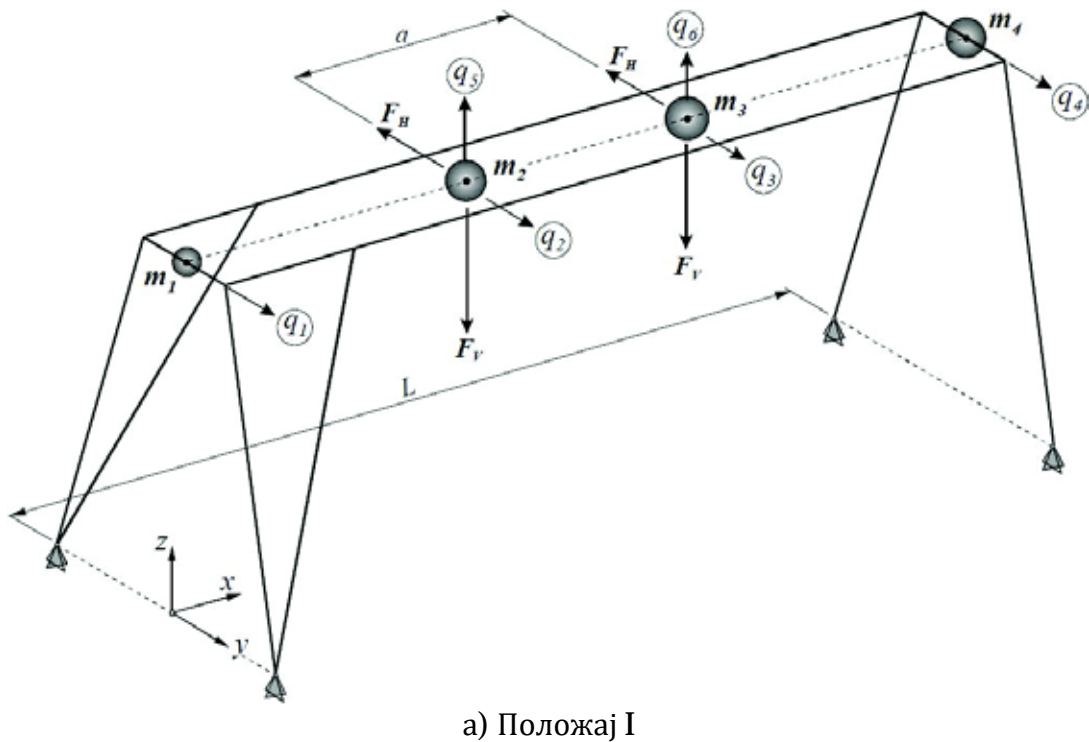
Слика 1.25 Модел обртне дизалице [37]

Анализирана је и једна магистарска теза [38], која се бави проблематиком анализе динамичког понашања претоварног моста. У овој тези, Гашић је истраживао проблеме везане за динамичко понашање специјалног претоварног моста са елеваторима услед деловања спољашњег оптерећења на захватним уређајима. Прво је извршена кинематичка анализа захватног уређаја и анализа спољашњег оптерећења система изазвано отпором хватања угла. Затим су формиран динамички модели стреле и носеће конструкције претоварног моста. Прво, формиран је оригинални динамички модел стреле као самосталног елемента који врши осцилације, слика 1.26. Друго, формиран је дискретни динамички модел носеће конструкције претоварног моста за два карактеристична режима рада, слика 1.27.



а) Основни модел б) Упрощени модел в) КЕ модел

Слика 1.26 Динамички модел стреле претоварног моста [38]



Слика 1.27 Дискретни динамички модел претоварног моста [38]

На крају, битна подлога за истраживање утицајних параметара на динамичко понашање носеће конструкције порталних дизалица великих носивости је и рад [39], аутора Васиљевића, Гашића и Савковића. Резултати овог рада показују да су кретање портала и осциловање терета у динамичкој анализи потребани параметари за поређење резултата са статичком анализом.

1.2.3

Методологија динамичке анализе

Са једне стране, за дефинисање побуде услед кретања портала и клаћења терета потребно је укључити једначине аналитичке механике. Са друге стране, с обзиром да сложеност портално-обртних дизалица и неопходност формирања просторног динамичког модела чист аналитички приступ у истраживању постављеног проблема се искључује. Значи, без великих апроксимација није могућ ни чист аналитички приступ ни чист коначно-елементни приступ.

Сагласно овоме усвојен је комбиновани (аналитичко-нумерички) приступ. Аналитички приступ биће примењен код формирања и решавања динамичког модела стреле односно анализе побуде, док ће нумерички (коначно-елементни) приступ бити примењен код формирања и решавања динамичког модела носеће конструкције и математичког модела порталне дизалице.

Подлога за решавање проблема утицајних параметара на динамичко понашање портално-обртних дизалица је део теорије осцилације под називом "Осцилације система са коначним бројем степени слободе (MDOF system)". Из овог курса теорије осцилација неки релевантни примери литературе су [40...46].

У динамици конструкција веома су важна два принципа, и то принцип идеализације реалног система и принцип дискретизације. Идеализација реалног система састоји се у свођењу реалног система на коначан број степени слободе. Дискретизација се састоји у замени расподељених маса директно концентрисаним масама или конзистентним масама. У овом истраживању биће примењен прилаз замене расподељених маса конзистентним масама, јер даје тачније резултате [47]. У динамици конструкција, за појам дискретизације се везује метода коначних елемената. Ова метода важи за најефикаснију и најпрактичнију за статичку и динамичку анализу конструкција у машинству и грађевинарству [48...50]. До данас је развијен велики број софтверских решења која аутоматизују примену МКЕ.

Анализа динамичког модела стреле односно побуде се спроводи се на основу Њутнових закона и основних једначина аналитичке механике (Даламберов принцип и Лангранжеве једначине друге врсте).

Анализа динамичког понашања носеће конструкције (портала) спроводи се на основу динамичке једначине равнотеже. Према усвојеној дискретизацији система формирају се карактеристичне матрице и вектори (матрице инерције система, матрице пригушења система, матрице крутости система и вектори спољашњих сила). Пригушење ће бити разматрано преко теорије Рејлија.

Сагласно дефинисаној методологији динамичке анализе, постављају се једначине кретања у форми система диференцијалних једначина другог реда са променљивим коефицијентима. Решења једначина ће се решавати методама директне интеграције (step-by-step methods), односно, конкретно Њумарковом методом. Полазни прилаз је да коначноелементни приступ захтева математички апарат заснован на матричном рачуну.

Са једне стране, математички апарат је релативно једноставан, али је, са друге стране, обим програмирања за формирање и решавање једначина релативно велики.

1.2.4

Основни и посебни циљеви

Циљеви ове дисертације треба да у области машинства дају научни допринос, са једне стране, и практични допринос, са друге стране.

Основни циљеви дисертације су садржани у научном доприносу. Иницијални основни циљ овог рада је дефинисање утицајних параметара на динамичко понашање порталних дизалица великих носивости и развој комбинованог (аналитичко-нумеричког) приступа за потребе њихове динамичке анализе. Са аналитичког аспекта, први конкретни основни циљ овог рада представља формирање и решавање новог (оригиналног) динамичког модела обртне стреле порталне дизалице, који представља надградњу постојећих савремених модела стрела [36] и [37]. Модел обртне стреле је исти за два конструкциона типа носеће конструкције порталних дизалица, који се разматрају. Са нумеричког аспекта, други конкретни основни циљ овог рада представља формирање и решавање новог (оригиналног) коначно-елементног модела носеће конструкције (портала) разматране дизалице, који је према сазнањима аутора јединствен у односу на истраживања портално-обртних дизалица до данас. Разматрају се два конструкциона типа носеће конструкције порталних дизалица, и то Н и Х. Даље, основни циљ овог рада је и анализа нумеричких резултата динамичке анализе формираних модела. На крају, један од основних циљева предметног истраживања је да формирано модели, уз одговарајуће измене, буду применљиви на групу портално-обртних дизалица.

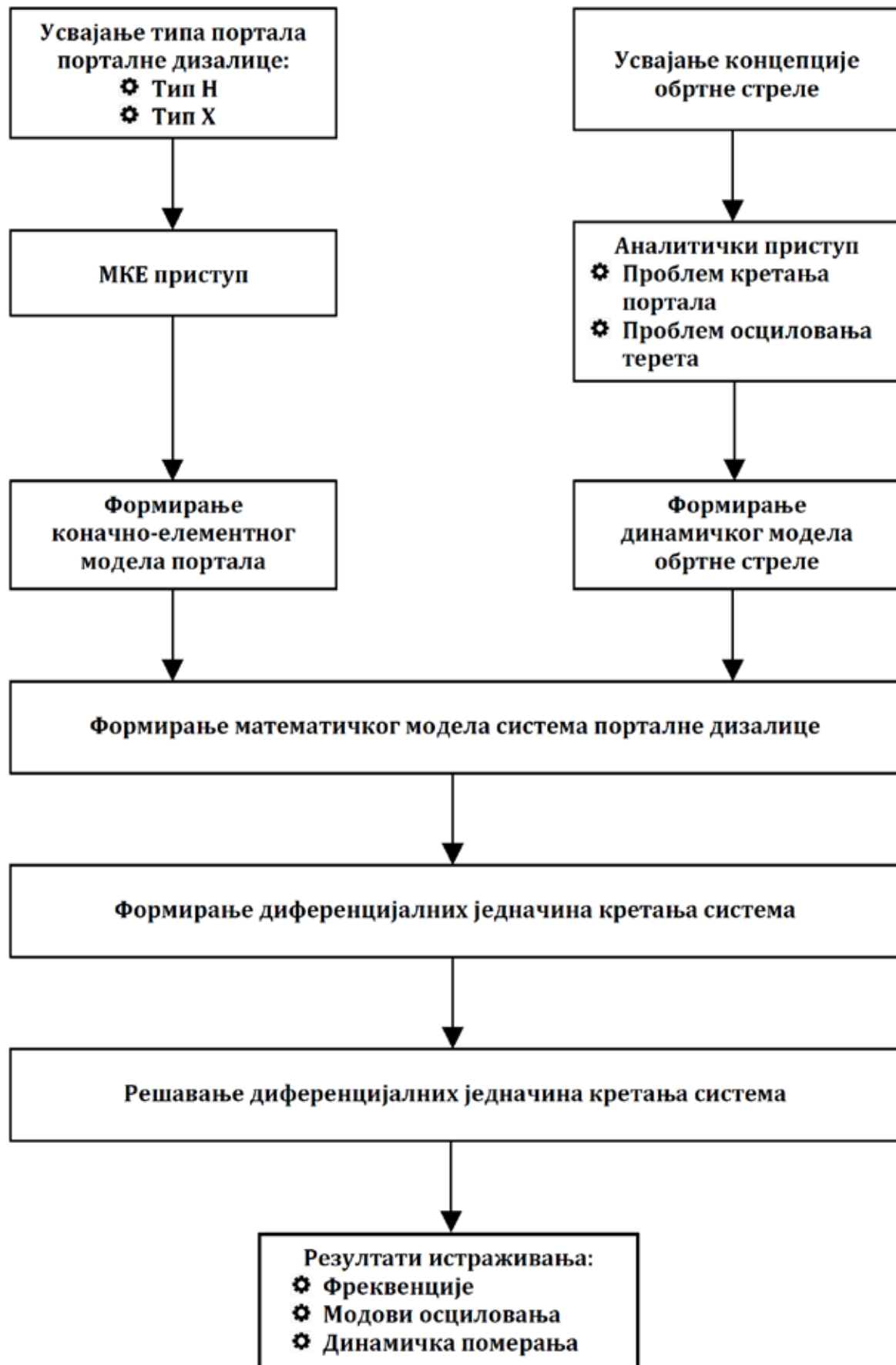
Посебни циљеви дисертације су садржани у практичном доприносу. Могућност практичне примене резултата ове дисертације је широка, што је њена још једна значајна карактеристика. Прво, добијене вредности утицајних параметра дефинисане у оквиру овог рада треба да допринесу смањењу све чешће присутних појава хаваријских оштећења порталних дизалица. Друго, како се релативно често дешава да конструктивна решења дизалица не представљају и оптимална решења, то вредности истих параметара могу допринети оптимизацији носећих конструкција порталних дизалица. Корисници резултата динамичке анализе спроведене у овом раду могу бити како постојећи тако и потенцијани нови произвођачи разматране дизалице, и тиме повећати своју конкуретност на тржишту. Вредности утицајних параметра могу користити пројектантима ових дизалица за формирање одговарајућих претпоставки у почетној фази пројекта порталних дизалица, чија конструкција треба да буде поуздана. Динамички одговори на побуду формираних модела треба да омогуће пројектовање лакших конструкција, са једне стране, а поузданих конструкција, са друге стране.

1.2.5

План истраживања

Сагласно предмету истраживања, постављеном проблему и прегледу радова из области динамике порталних дизалица велике носивости и других сличних дизалица, састављен је план истраживања, слика 1.28.

Приказани план истраживања биће спроведен коришћењем одговарајућих метода за формирање и решавање диференцијалних једначина кретања система.



Слика 1.28 Струкура плана истраживања

2

КОНЦЕПЦИЈЕ КОНСТРУКТИВНИХ РЕШЕЊА НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ И ЊИХОВЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ

Данас, постоје бројне изведене концепције конструктивних решења носеће конструкције (портала) портално-обртних дизалица. Општа карактеристика свих носећих конструкција (портала) је да се састоје из механизма за кретање и просторног рама.

Основни елементи механизма за кретање су погон, редуктор и извршни елементи. Погон механизма за кретање је најчешће електромоторни. Према начину остваривања кретања извршни елементи механизма за кретање могу бити шински точкови, пнеуматски точкови и гусенице.

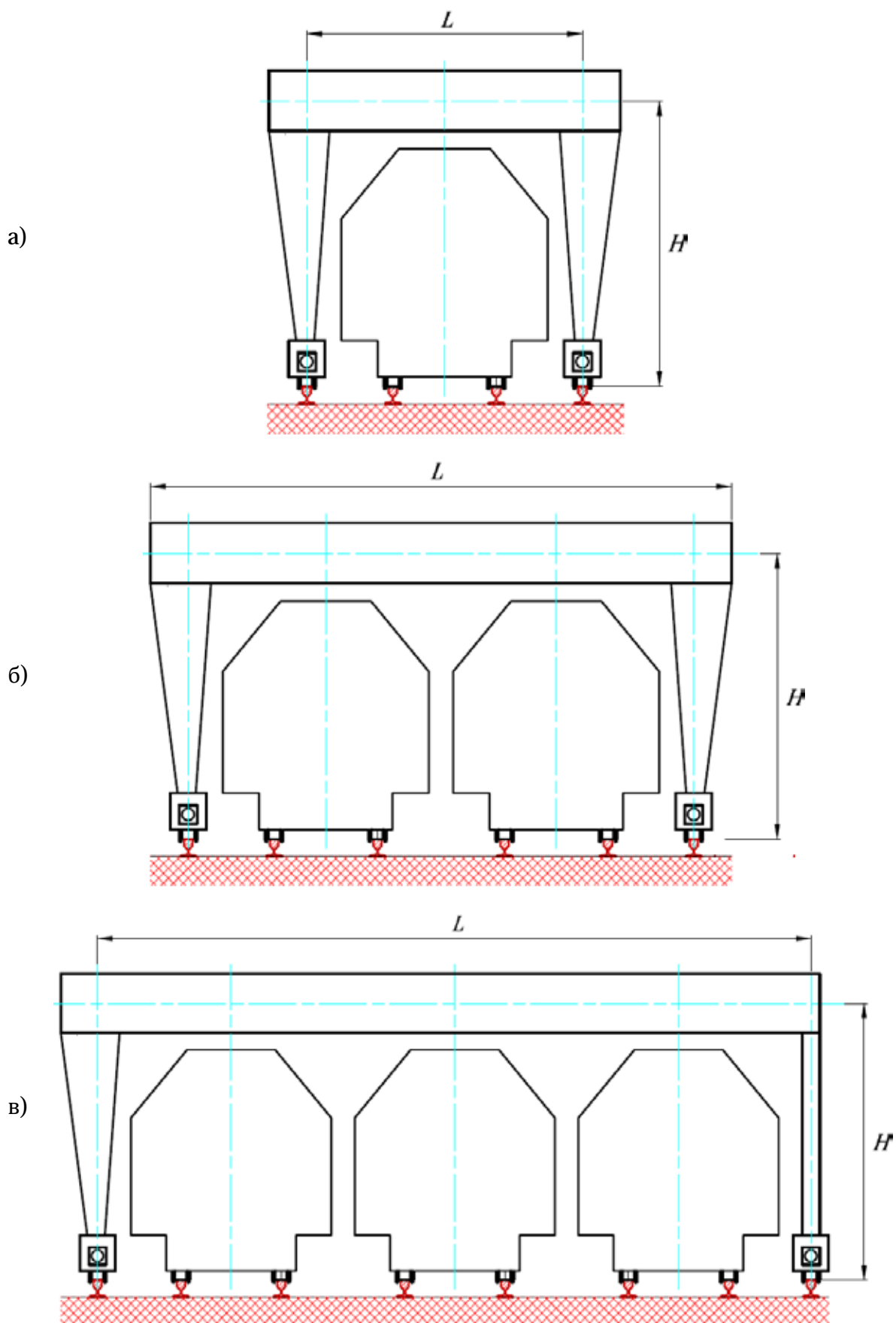
Портал је крути просторни рам који прекрива неки транспортни ток и омогућава пролаз транспортних средстава. Најчешће прекрива железничку пругу и омогућава пролаз теретних возова. Структура просторног рама се у принципу може поделити на два главна подструктурна дела, и то на доњи део рама (ноге) и горњи део рама, који има функцију да прими оптерећење. Елементи просторног рама могу бити пуни и решеткасти носачи.

Пуни носачи су носачи код којих су појасеви профила међусобно везани по целој дужини вертикалним зидом. Према начину израде пуни носачи могу бити ваљани и лимени. Лимени носачи су израђени од више челичних елемената спојених заваривањем или закивањем. У овој дисертацији се главни акценат ставља на носеће конструкције односно портале израђене од заварених пуних носача (сандучасти носачи).

Карактеристике носача (пуних и решеткастих) су детаљно дате у [55].

Постојање различитих концепција конструктивних решења носеће конструкције порталне дизалице објашњава се разноврсним захтевима ка портаним дизалицама и њиховим порталима, традиционалним разликама, великим бројем предузећа за производњу дизалица, недовољној изучености динамике и оптимизације порталних дизалица итд. Портали на првом месту морају да задовоље мере и конфигурацију коју захтева транспортни ток, место опслуживања и слично.

У тексту који следи биће презентоване неке најдоминантније концепције конструктивних решења носећих конструкција порталних дизалица. Конструкциони типови портала биће представљени кроз могуће груписање портала у оговарајуће групе.



Слика 2.1 Типови порталних кранова с обзиром на број колосека

Прво, према броју железничких пруга које прекривају разликују се следећи конструкциони типови портала, слика 2.1:

- једноколосечни портали, слика 2.1.а,
- двоколосечни портали, слика 2.1.б, и
- троколосечни портали, слика 2.1.в.

Од приказаних типова портала на слици 2.1 најчешће се примењују портали који покривају један колосек, али се релативно често примењују и портали који прекривају два или три колосека. Према стандарду ГОСТ 7994-56 распони L портала приказаних на слици 2.2 редом износе 6 [m], 10,5 [m] и 15,3 [m], [3]. Према истом извору распони портала портала дизалица за опремање износе 6 [m] и 10 [m], док се распони портала пристанишних порталних дизалица крећу од 3,5...4 [m].

Код једноколосечних портала оса обртања стреле се налази на средини портала. Затим, код двоколосечних портала оса обртања стреле се налази на средини портала или је померена према једној од страна колосека. И, код троколосечних портала обртни део често остварује кретање од једне до друге стране колосека (од круте до еластичне ноге).

Један пример порталне дизалице са јеноколосечним порталом нормалне висине приказан је на слици 2.2.

Портал са слике 2.2 је рамно-решеткаста носећа конструкција односно представља комбинацију рамног и решеткастог носача. Основне техничке карактеристике порталне дизалице са овим порталом износе: носивост $m_Q = 10$ [t] и распон стреле $L = 22,6$ [m]. Прве порталне дизалице овог типа серијски је произвело је 1950. год. предузеће "РТО" из Кирова за потребе изградње канала Волго-Донског [3]. Носећа конструкција ове дизалице се састоји из горње подструктуре и четири ноге које су међусобно повезане решеткама у вертикалним равнима паралелним са шинама. Горња подструктура се састоји из четири носача, који су међусобно спојени ромбоичном решетком. На горњу подструктуру портала монтира се цевни добош.

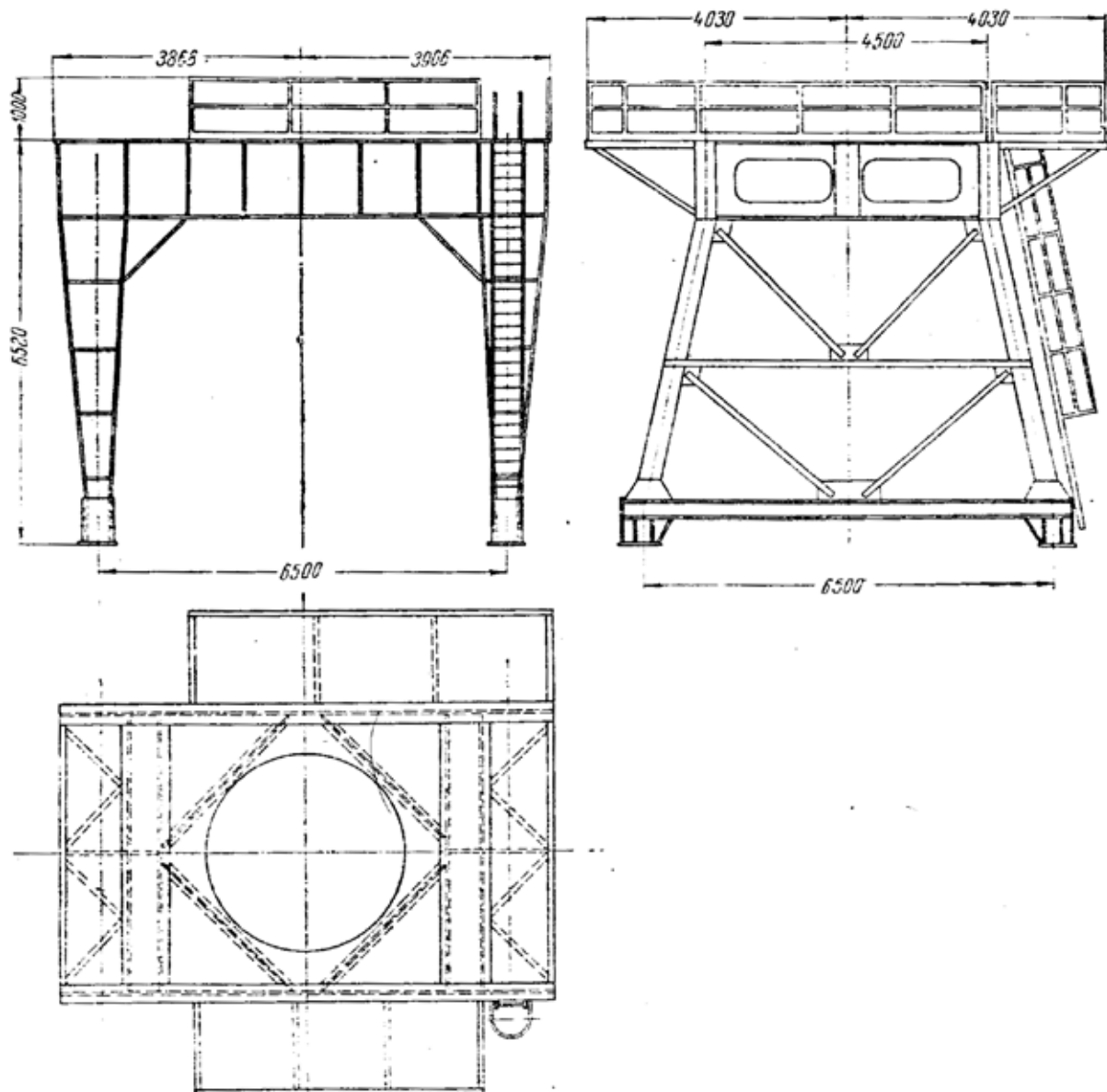
Друго, у принципу једноколосечни и двоколосечни портали (слика 2.1а,б) имају просторну рамну конструкцију, док се троколосечни портали (слика 2.1в) по својим распонима приближавају портално-мосним крановима и понекад имају са једне стране круту ногу а са друге стране еластичну ногу. У том смислу, према начину спајања горње подструктуре са ногама портали могу бити:

- крути (слике 2.1.а и 2.1.б), и
- еластични (слика 2.1.в).

Треће, према висини портали се деле на:

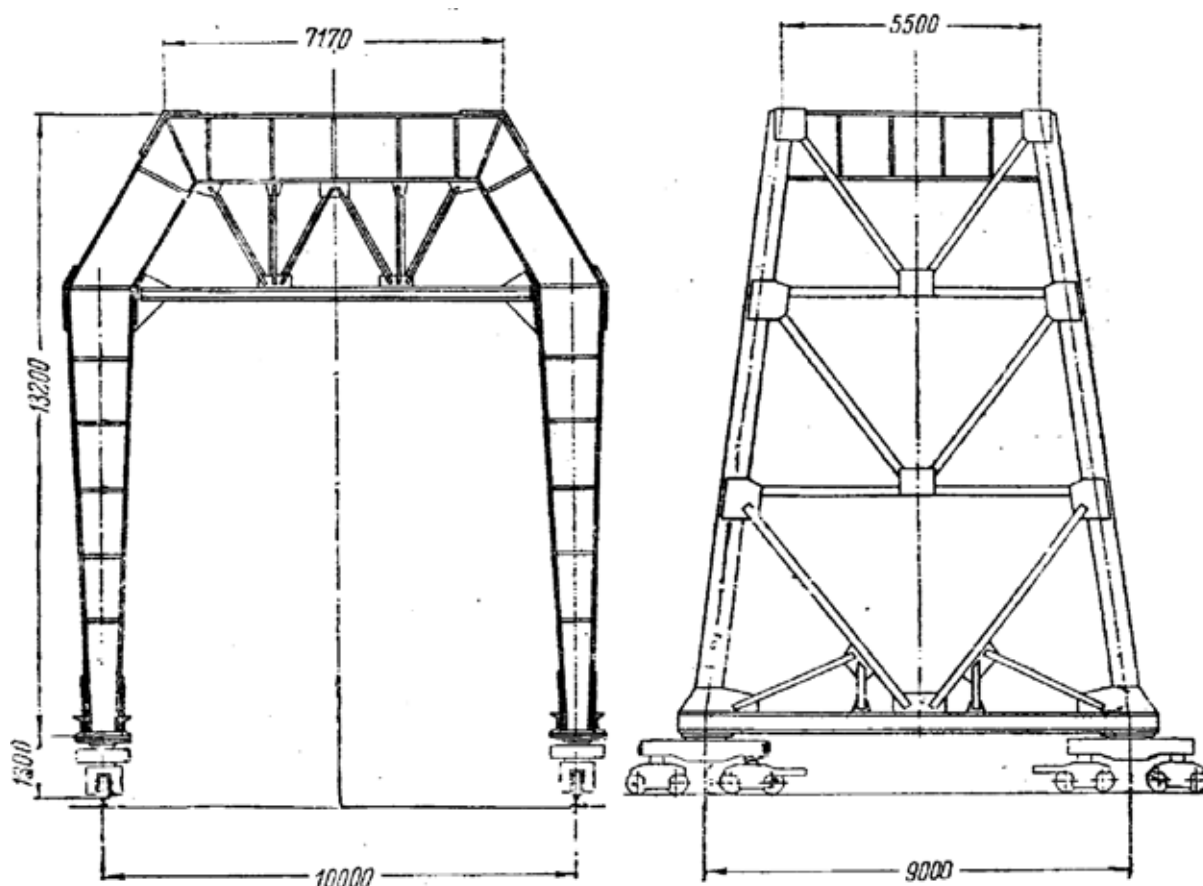
- нормалне висине (слика 2.1.а),
- средње висине, и
- високе.

Приказани типови портала на слици 2.1 спадају у групу портала нормалне висине. Они се углавном примењују на лучким и железничким терминалима и при монтажи порталних дизалица.



Слика 2.2 Једноколосечни портал дизалице носивости 3 [t], [3]

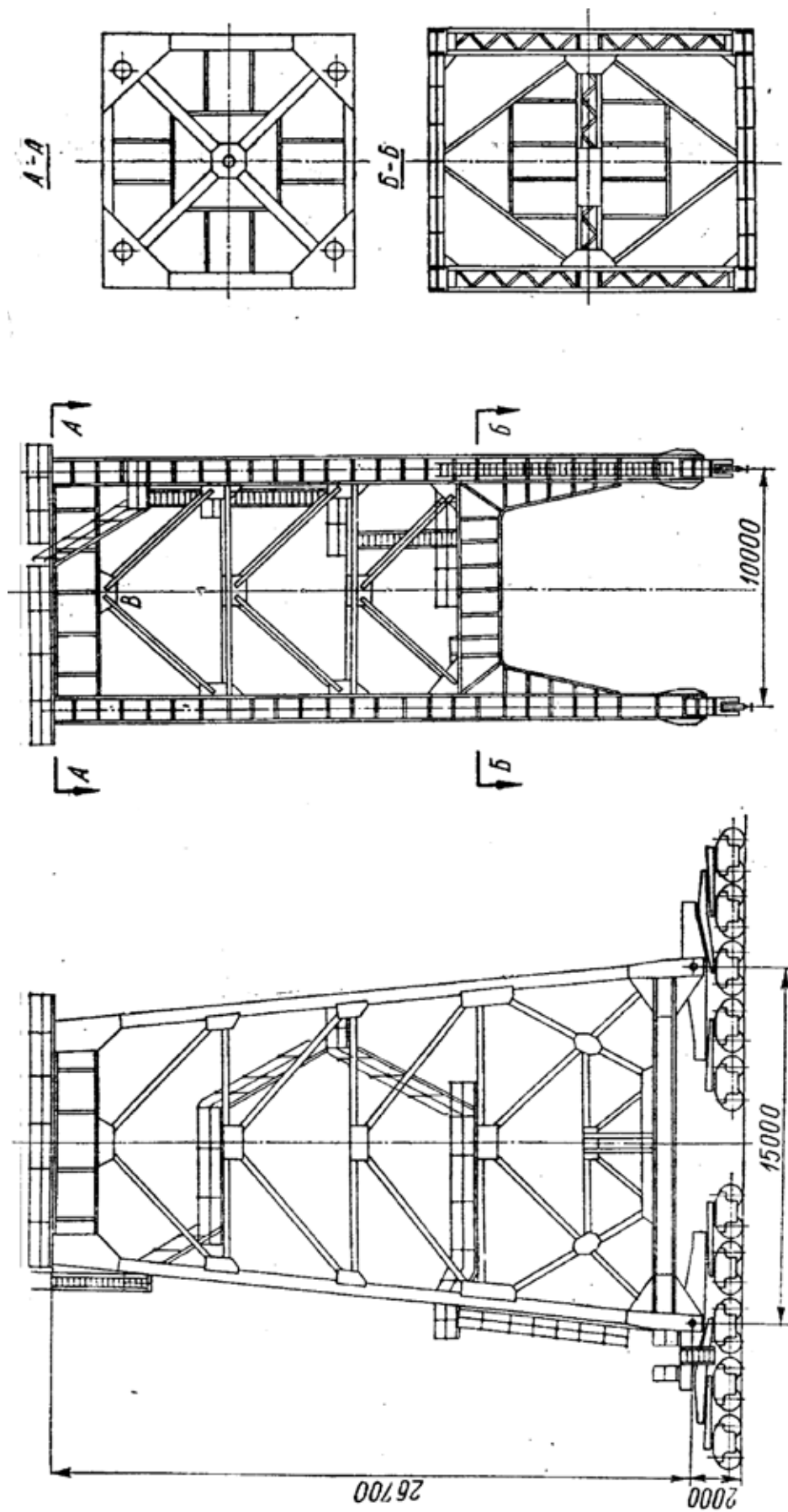
При конструисању портала потребно је обратити пажњу да се дизаличару обезбеди добра видљивост радног места. У том циљу често се обарају горњи углови портала. Пример портала дизалице носивости 10 [t] са овом карактеристиком приказан је на слици 2.3.



Слика 2.3 Портал порталне дизалице носивости 10 [t], [3]

Овај портал има веће габаритне димензије (14,5 [m] – висина и 10 [m] – распон) у односу на портале нормалне висине, чиме се сврстава у групу портала средње висине. И дизалице са овим типом портала су прво серијски произведене за изградњу канала Волго-Донског, а затим и за друге хидротехничке изградње [3]. Карактеристика овог портала је да су носећи елементи рама ојачани са затезним решеткама. Прелазак од раванског хоризонталног рама до ногу портала остварен је помоћу косих елемената, што побољшава видљивост радног места дизаличара. Сви елементи рама су заварени.

Код бродоградилишних и бродоремонтних дизалица обртне стреле се обично постављају на високе носеће конструкције (портале) у циљу бољег опслуживању радова при монтажи и ремонту бродова. Пример портала изведеног решења дизалице овог типа носивости $m_Q = 75$ [t] приказан је на слици 2.4. Овај портал представља просторни решеткасти систем. У вертикалним равнима паралелним са кранским шинама портал се састоји од две вертикалне равне мосне конструкције решеткасте изведбе. У вертикалним равнима нормалним на шине портал се састоји од два нагнута рама решеткасте изведбе. Све четири равни завршавају се носачима са цевним добошем на који се посредством лежаја монтира обртни део крана.



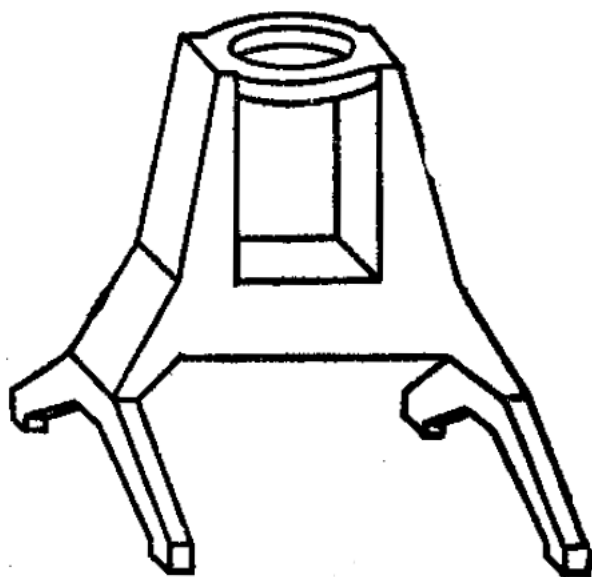
Слика 2.4 Портал порталне дизалице носивости 75/50 + 10 [t], [3]

Четврто, према броју спајања са покретним делом портали се дела на:

- портали са две ноге
- портале са три ноге, и
- портале са четири ноге.

На слици 2.5.а приказан је портал са две ноге, који често има сандучасту конструкцију.

Предузеће за производњу дизалица "Demag" из Немачке, произвело је низ дизалица са порталима на три ноге. То је довело до смањења масе носеће конструкције и побољшања пролазности крана по криволинијским кранском путу, а да није дошло до смањења стабилности. Пример порталне дизалице са три ноге приказан је на слици 2.5.б.



а)

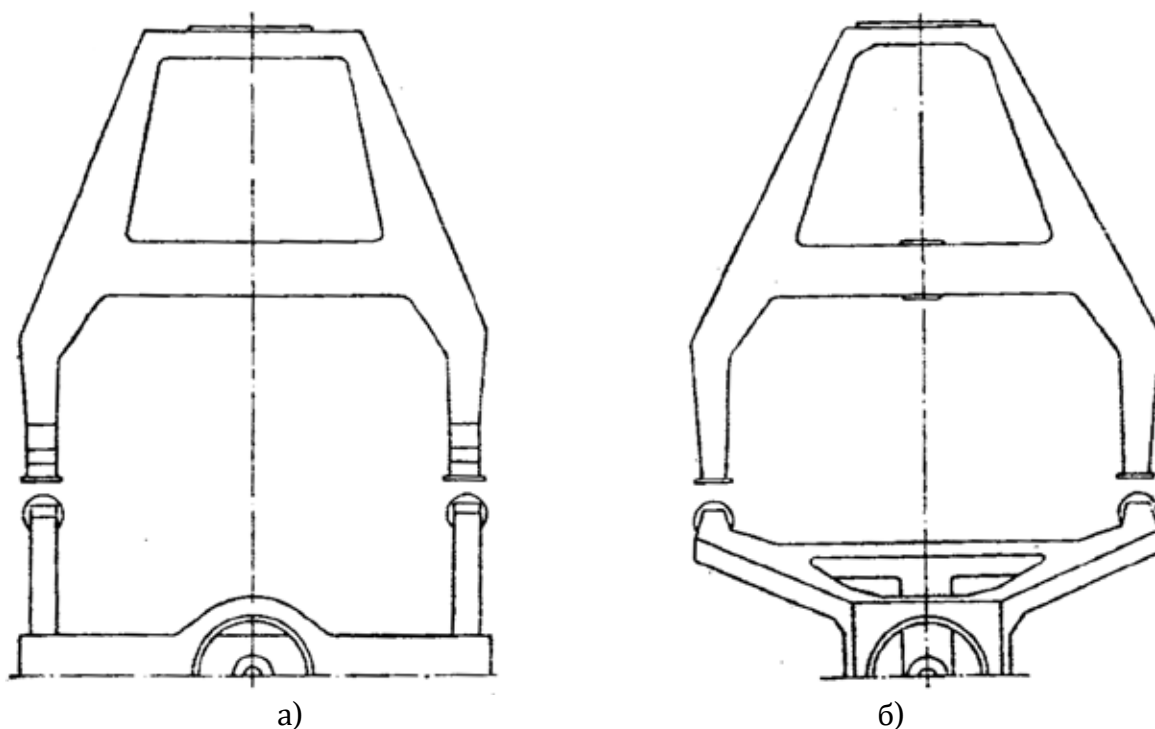


б)

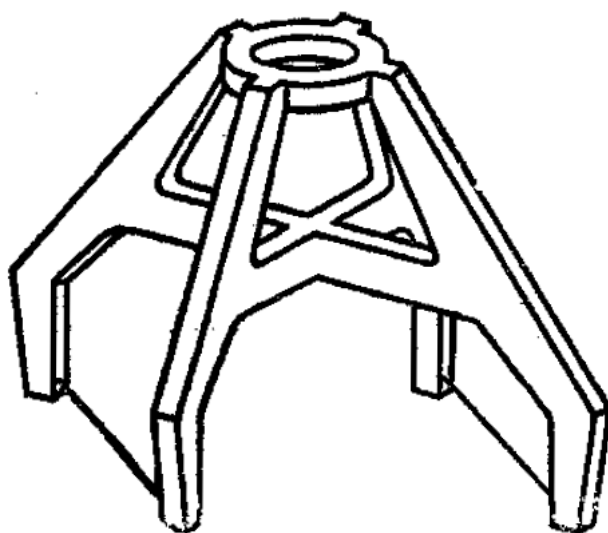
Слика 2.5 Портал са три ноге [3, 4]

На слици 2.6 и 2.7 приказани су конструкциони типови портала са четири ноге. Заједничке карактеристике ових типова портала је да се састоје од елемената сандучастог профила и да се на њих монтира окретни стуб. Овај стуб представља заједнички део са обртним делом порталне дизалице. Портали (слике 2.6 и 2.7) представљају просторне рамне конструкције. Ноге портала су међусобно спојене двојако. Са једне стране, ноге портала су међусобно спојене посредством горње подструктуре портала облика кружног прстена. Са друге стране, ноге су спојене у средњем нивоу портала хоризонталним рамовима облика Н и Х. Спајање ових рамова са ногама остварује се вијчаним или завареним везама. Хоризонтални рамови служе за ношење обртног стуба.

Портали са слике 2.6.б и 2.7 у овој десертацији дефинишу се као конструкциони типови Н и Х. У насловима који следе (3, 4, 5 и 6) ова два конструкциона типа портала биће предмет истраживања динамичког понашања порталних дизалица.



Слика 2.6 Портали са четири ноге [3]



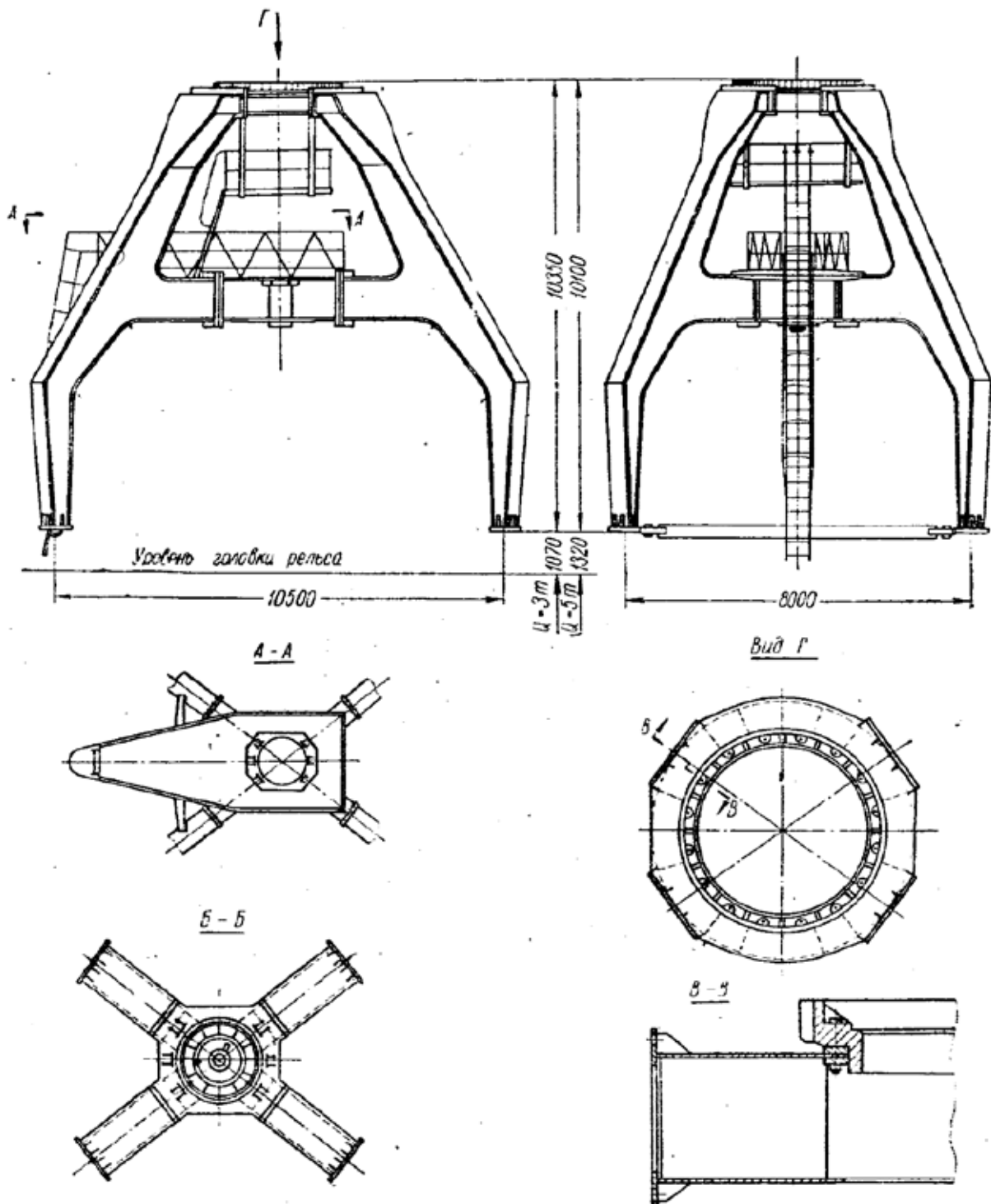
Слика 2.7 Портал са четири ноге [4]

Пето, према начину формирања конструкције портали се деле на:

- рамне портале (слика 2.1, 2.5, 2.6.а и 2.6.б),
- рамно-стубне,
- решеткасте портале (слике 2.4), и
- комбиноване (слика 2.3).

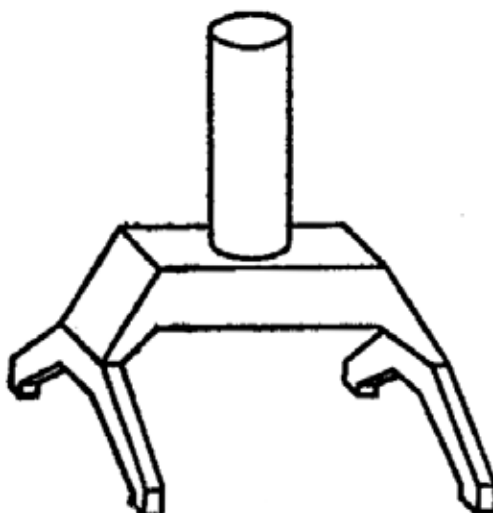
Раније су се више примењивали решеткасти и решеткасто-лимени портали, док се данас више примењују портали који се састоје из елемената са сандучастим профилем (слике 2.5, 2.6 и 2.7) или решење од цеви.

На слици 2.8 је приказан један пример изведеног решења рамног портала дизалице са обртним стубом носивости 5 [t] [3].



Слика 2.8 Изведено решење рамног портала [3]

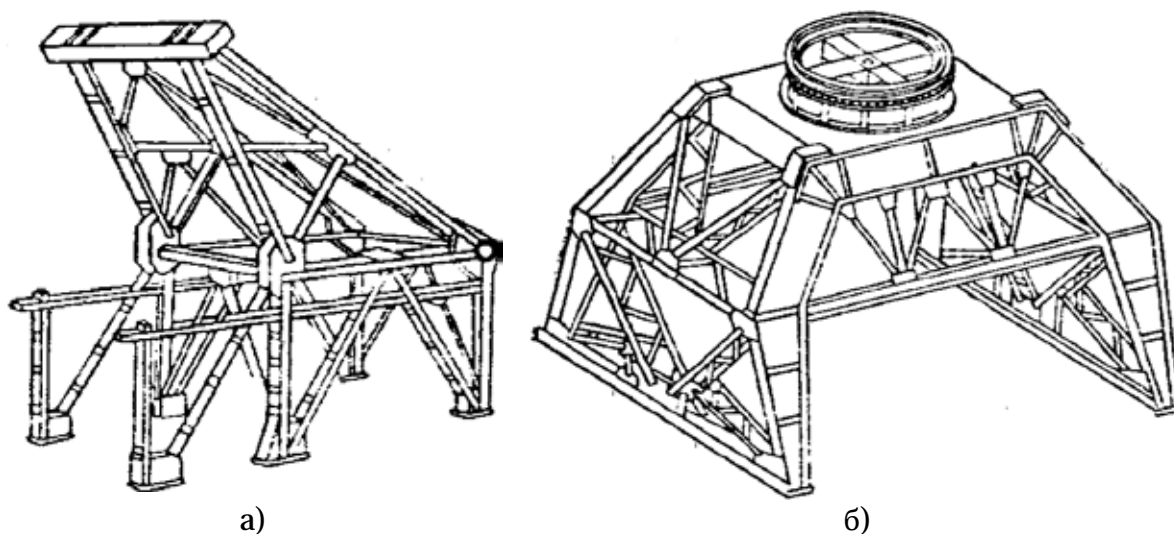
На слици 2.9 приказан је рамно-стубни портал са две ноге. Стуб је монтиран на портал и он је неокретан. Он представља продужетак рама и око њега се обрће обртни део дизалице. Стуб рамно-стубног портала се упарује са куглично или ваљчано ослоно-обртним кругом. Ови портали су најпростији за производњу и монтажу, јер се састоје из најмањег броја делова. Али, стуб добија значајно померање услед савојних деформација. Ово исто важи и за кружни прстен рама са две ноге (слика 2.5.а).



Слика 2.9 Рамно-стубни портал [4]

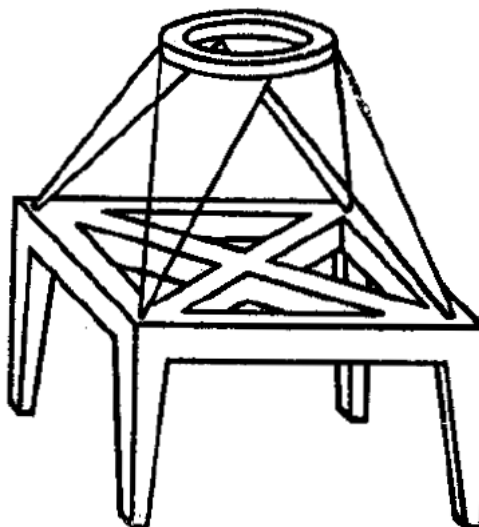
Према статистичким подацима примена портала са две ноге и рамно-стубних портала се шири, док се примена портала са четири ноге смањује [4].

На сликама 2.10.а и 2.10.б приказана су још два решења портала са решеткастом конструкцијом.



Слика 2.10 Портали са решеткастом конструкцијом [3]

На слици 2.11 приказан је пример комбинованог конструкционог типа портала односно рамно-дијагонални тип портала. Он има осам дијагоналних штапова. Пошто на дијагоналне штапове делују аксијалне силе, маса портала са комбинованом конструкцијом је мања од масе портала са чисто рамном конструкцијом. Наиме, ови портали испољавају двојачке предности односно предности и рамних и решеткастих конструкција.



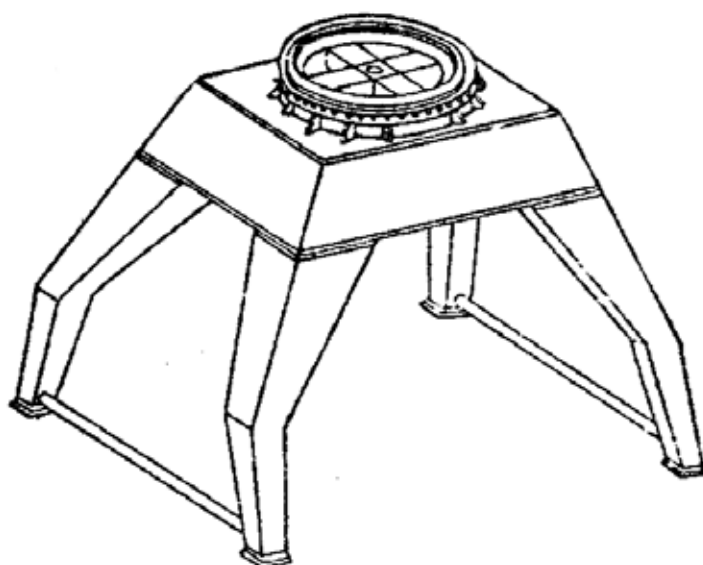
Слика 2.11 Портали са ослоначко-обртним постољем у виду круга [4]

На конструкцију портала утиче тип ослоначко-обртног постројења порталне дизалице. У зависности од типа ослоначко-обртног постројења изведена су решења порталних дизалица на обртном кругу и порталних дизалица на стубу. Решења порталних дизалица на стубу могу бити двојака, и то на обртном стубу и на необртном стубу.

Сагласно овоме дефинишемо шесто груписање портала, према коме разликујемо:

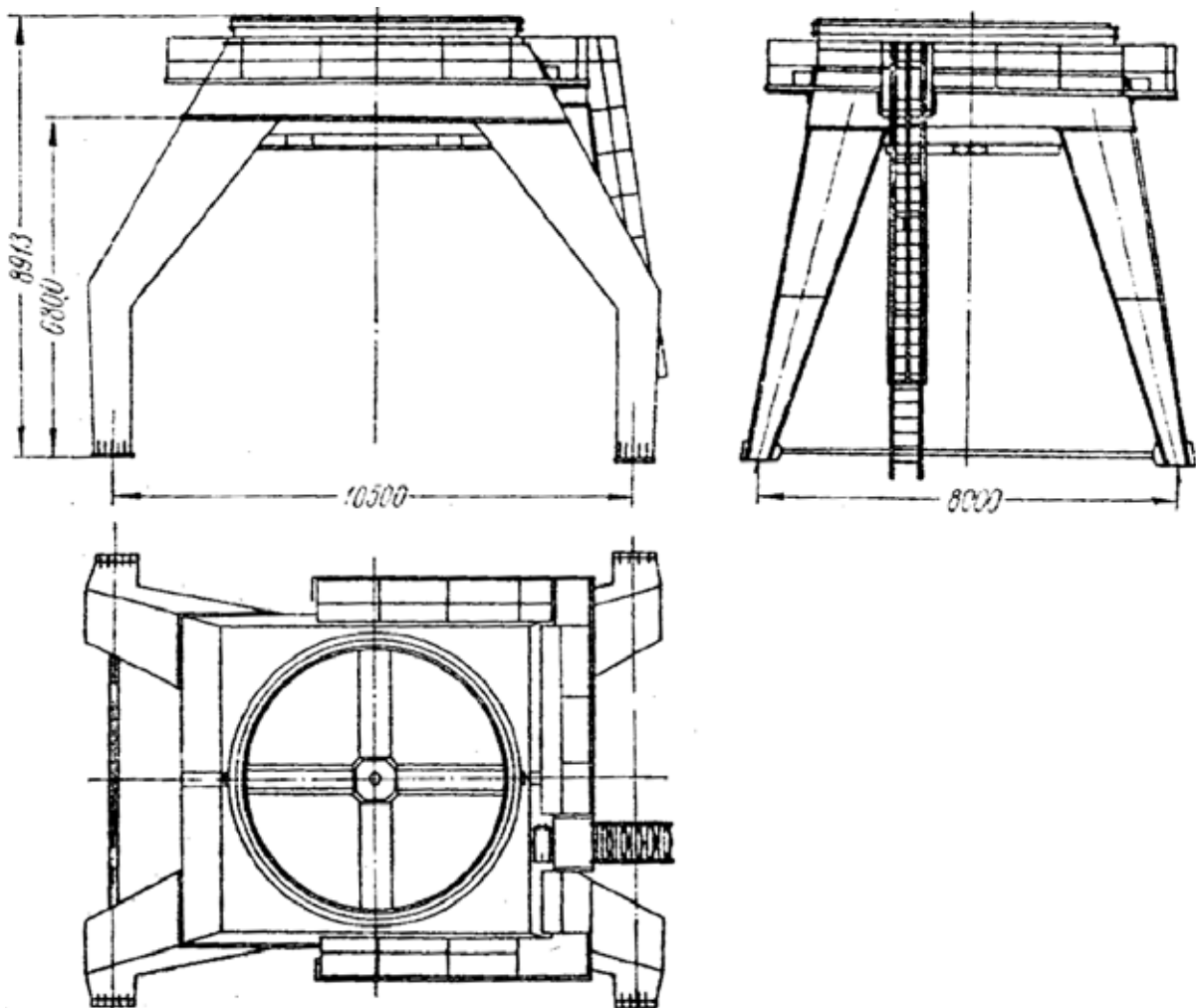
- портале са обртним кругом (слике 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5.б, 2.10.б и 2.11),
- портале са обртним стубом (слике 2.5.а, 2.6.а, 2.6.б и 2.7, 2.8), и
- портале са необртним стубом (слика 2.9).

Разликују се два конструкциона типа ослоначко-обртног постоља порталних дизалица, и то са точковима и са куглицама или ваљцима. Више детаља о овим ослоначко-обртним постољима дато је у [1, 3 и 4]. На слици 2.12 илустрован је још један пример портала код кога је ослоначко-обртно постројење изведено у виду обртног круга.



Слика 2.12 Портали са ослоначко-обртним постољем у виду круга [3]

Детаљнији опис портала овог типа илуструје пример изведеног решења портала дизалице носивости 10 [t] и распона 10 [m], слика 2.13.



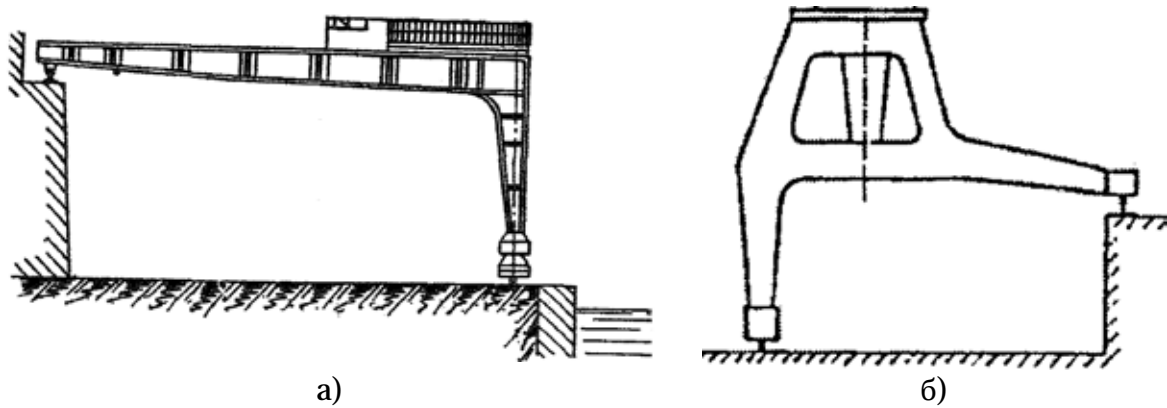
Слика 2.13 Портали са ослоначко-обртним постољем у виду круга носивости 10 [t], [3]

Портална дизалица са овим конструкционим типом портала произведена је 1961. године. Приказани портал има четири ноге сандучастог профила које су са горњом подструктуром спојене вијачаним везама. Цевни точак представља једну целину са горњом подструктуром. Конструкције ногу и елементи горње подструктуре изведене су од листова дебљине 8...12 [mm].

Према седмом груписању, односно према начину ослањања обе стране конструкције на шине, разликују се:

- портали, (слике 2.1...2.13), и
- полупортали.

Портали су носеће конструкције које се са обе стране конструкције ослањају на шину постављену на фундамент, док се полупортали са једне стране ослањају на шину постављену на фундамент а са друге стране на шину постављену на надвожњак или на стубове (носаче у зиду грађевинског објекта). Два примера полупортала приказана су на слици 2.14.



Слика 2.14 Полупортали

Од наведених концепција конструктивних решења носећих конструкција порталних дизалица, са аспекта облика рама у хоризонталној равни издвајају се два основна и доминантна типа носеће конструкције порталних дизалица, и то:

1. носећа конструкција типа Н (слика 2.6.б), и
2. носећа конструкција типа Х (слика 2.7, 2.8).

3

ДИНАМИЧКА АНАЛИЗА ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ ВЕЛИКЕ НОСИВОСТИ

Због еластичности механизма и носеће конструкције услед дејства инерцијалних сила долази до осциловања [1]. Ове осцилације су неповољније што је време дејства тих сила краће.

Први основни проблем у истраживању динамичког понашања портално-обртних дизалица јесте дефинисање побуде.

Други основни проблем у истраживању динамичког понашања портално-обртних дизалица јесте усвајање одговарајућег модела. Формирању модела порталне дизалице приступа се тако да се утицај оптерећења и стреле сведе на одговарајућа места носеће конструкције дизалице. Аналоган приступ је примењен у истраживању динамичког понашања претоварног моста у раду [38].

У поглављу 1, кроз преглед литературе, је дат увид да су у проблематици фреквентног и динамичког одговора носеће конструкције присутани следећи приступи:

- 1) Аналитички приступ,
- 2) Нумерички приступ, и
- 3) Аналитичко-нумерички приступ.

Аналитички приступ је веома присутан у анализи фреквентног и динамичког одговора носеће конструкције, али је до скоро био ограничен на просте моделе (проста греда и проста конзола). Сложенији модели (рамовски модели) почели су да се разматрају у новије време, захваљујући појави напредних математичких програма (нпр. Mathematica®). Код сложених просторних рамовских модела неопходан је нумерички приступ. Даље, ако на сложени просторни рамовски модел делује сложена побуда, може се користити комбиновани (аналитичко-нумерички) приступ.

Са аспекта истраживања динамичког понашања, портална дизалица се састоји из два основна подсистема:

- 1) носеће конструкције (портала), и
- 2) обртне стреле.

Сагласно дефинисаној конфигурацији порталне дизалице, моделирање порталне дизалице се може поделити на два дела:

- 1) моделирање обртне стреле са механизмом за дизање, и
- 2) моделирање носеће конструкције.

У том смислу у наставку приступамо одвојено моделирању моделирању обртне стреле са механизмом за дизање и носеће конструкције (портала).

3.1 МОДЕЛИРАЊЕ ОБРТНЕ СТРЕЛЕ ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ

Обртна стрела у систему порталне дизалице је електро-машински подсистем, односно компактна машина која се обрће. Састоји се од великог броја машинских и електричних делова. Она представља основни функционални део на портално-обртној дизалици. За потребе истраживања у овом раду се посматра случај потпуног оптерећења, односно обртна стрела укључује и терет као њен саставни део.

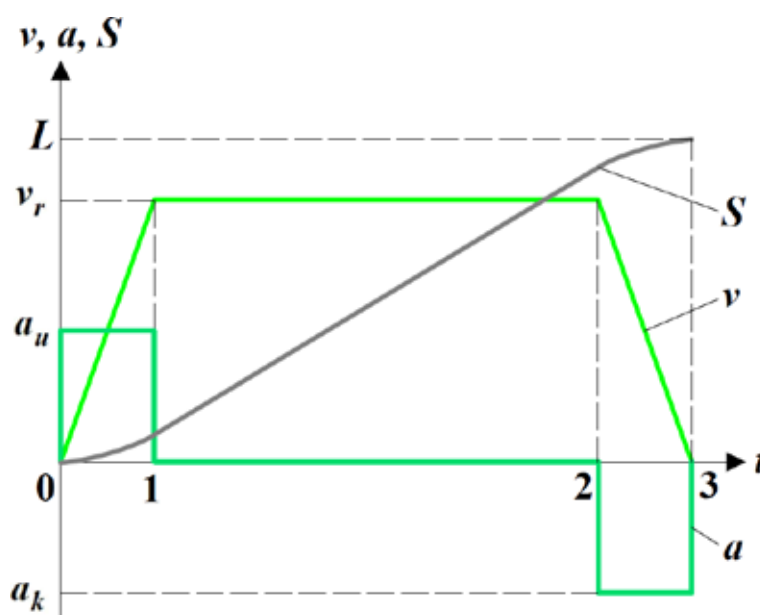
Фундаментални проблем је како моделирати утицај кретања портала и клаћења терета. Да би се што свеобухватније узео утицај ове побуде, њеном моделирању се прилази аналитички. Аналитички прилаз код моделирања оптерећења од утицаја кретања портала и клаћења терета се заснива на формирању закона кретања терета у подужном и бочном правцу, који су функција времена и профила брзине.

У овом поднаслову је формиран и решен динамички модел стреле портално-обртне дизалице.

3.1.1 Кинематичке величине кретања портала

Портал односно база разматране дизалице може да изводи само праволинијско кретање од тачке до тачке.

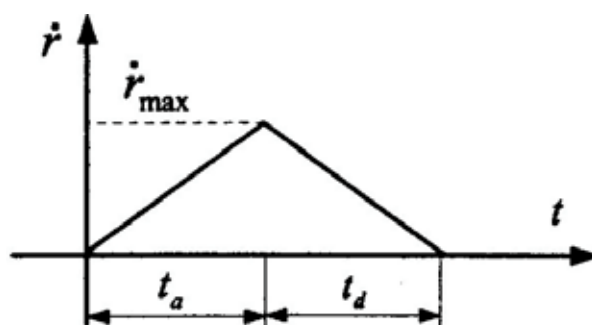
Кинематичке величине кретања порталне дизалице су брзина кретања, убрзање и пређени пут. Према [1], за прорачун механизма за кретање код дизалица најчешће се користи трапезни профил брзина. Сагласно томе, у овом раду је усвојено да се у току једног циклуса дизалица (портал) дуж шинске стазе креће са трапезним профилем брзина. За усвојени профил брзина, на слици 3.1 је приказан дијаграм кретања портала порталне дизалице у произвољном времену.



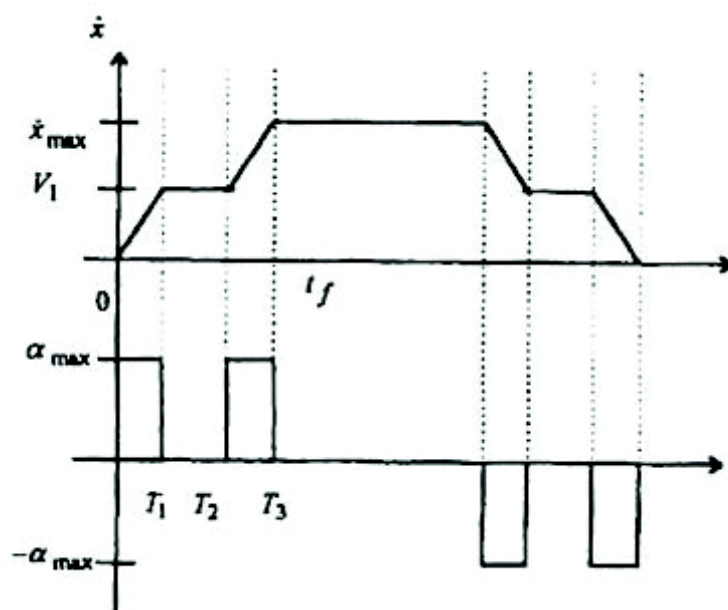
Слика 3.1 Кинематички дијаграми кретања портала дизалице

Са слике 3.1 се види да се кретање портала састоји из три фазе. У фази 0-1 (време t_u) портал се убрзава константним убрзањем a_u тако да брзина кретања линеарно расте и на крају прве фазе достиже брзину v_r . Друга фаза 1-2 је фаза равномерног кретања током времена t_r , коју карактерише константна брзина v_r . У фази 2-3 (време t_k) портал се константно успорава успорењем a_k до његовог заустављања. Пређени пут портала се одређује на основу профила брзина, слика 3.1.

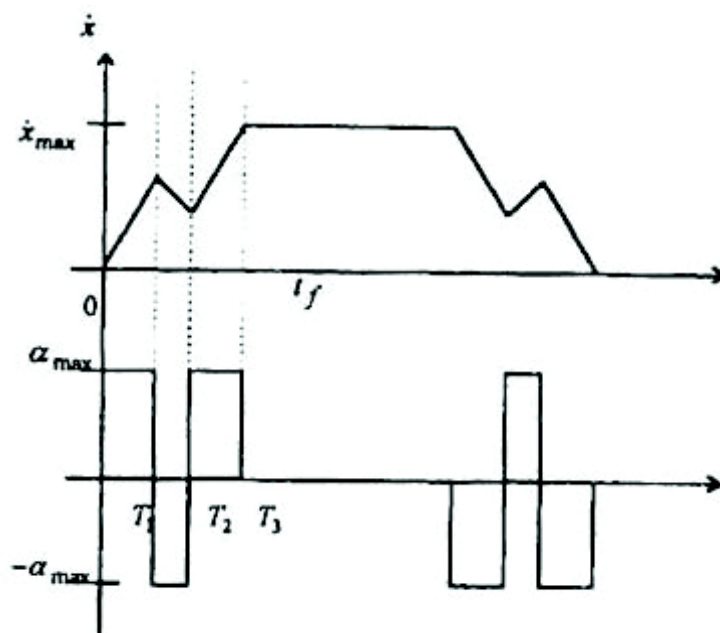
Још постоје троугаони, слика 3.2 [51], степенести, слика 3.3 [52], и зарезани профил брзине кретања, слика 3.4 [52]. За добијање динамичког одговора носеће конструкције побуђене кретањем портала и клађењем терета користиће се трапезни профил брзина кретања, јер представља оштрији критеријум у односу на троугаони, степенести и зарезани профил.



Слика 3.2 Троугани профил [51]



Слика 3.3 Степенести профил [52]

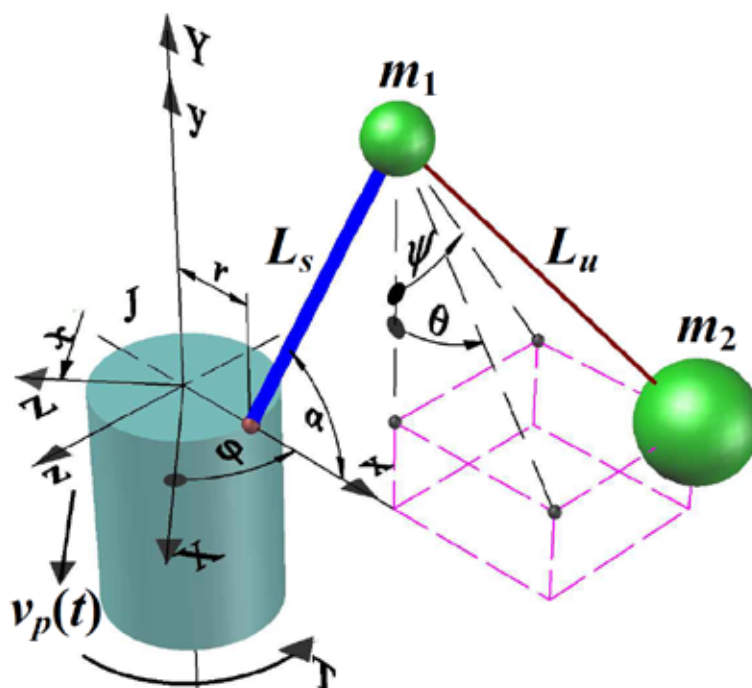


Слика 3.4 Зарезани профил [52]

3.1.2

Опис модела стреле

Стрела је саставни део портално-обртне дизалице. Подсистем стреле се састоји од носеће конструкције стреле и ужетног система стреле. Носећа конструкција стреле је зглобно везана за платформу. У систему порталне дизалице, стрела се идеализовањем посматра као самостални подсистем. Сагласно овоме, на слици 3.5 је приказан еквивалентни динамички модел стреле порталне дизалице са општом стрелом.



Слика 3.5 Модел стреле

Динамички модел стреле је формиран за потребе одређивања динамичких оптерећења. Стрела се посматра као самостални подсистем који врши осцилације. Подсистем стреле се састоји од носеће конструкције стреле и ужетног система стреле. Еквивалентни динамички модел је формиран тако да, са једне стране, задржи главне динамичке карактеристике стреле, а са друге стране, да дефинисани проблем буде математички решив.

Дискретизација носеће конструкције стреле је извршена на један лаки штап са редукованом масом на врху.

Са слике 3.5 се види да је подсистем стреле са теретом представљен са две концентрисане масе, два лака штапа и кружним диском. Носећа конструкција стреле је представљена лаким штапом дужине L_s и масом m_1 , која је редукована на врх стреле. Ужетни систем стреле је представљен неистегљивим лаким штапом дужине L_u и масом m_2 , чиме је омогућено клаћење терета. Маса m_2 представља масу терета. Значи, врх стреле односно маса m_1 и маса m_2 су спојене неистегљивим лаким штапом дужине L_u . Окретни стуб је представљен са кружним диском аксијалног момента инерције J и момента обртања T . Растојање зглоба стреле од осе стуба једнако је r .

Редукована маса m_1 се на основу препорука [38] може одредити према следећем односу:

$$m_1 = \left(\frac{1}{4} \dots \frac{1}{3} \right) m_s \quad (3.1)$$

где је m_s маса стреле.

3.1.3

Математичка формулација

За поставку математичке формулације формираног динамичког модела стреле користиће се Лангранжеве једначине друге врсте. Једначине кретања елемената стреле се постављају на основу еквивалентног динамичког модела приказаног на слици 3.5.

Динамичке једначине кретања система гласе

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_t^2 \sin \theta(t) = -\frac{1}{L_u} \ddot{x}(t) \cos \varphi \quad (3.2.a)$$

$$\ddot{\psi}(t) + \omega_t^2 \sin \psi(t) = -\frac{1}{L_u} \ddot{x}(t) \sin \varphi \quad (3.2.b)$$

$$J\ddot{\phi}(t) = T \quad (3.2.b)$$

где су:

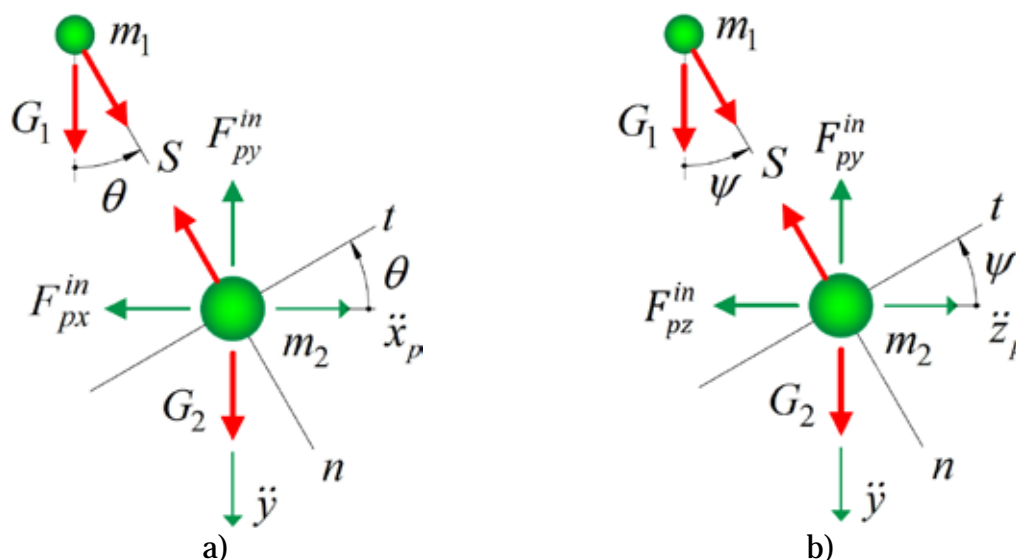
- θ – угао осиловања терета (клатна) у подужном правцу,
- ψ – угао осиловања терета (клатна) у бочном правцу,
- φ – угао обртања стуба односно стреле,
- x – праволинијско померање портала, и
- ω_t – кружна фреквенција осциловања терета (клатна).

3.1.3.1

Осциловање терета

Из прве две једначине (3.2.а и 3.2.б) одредиће се закони непригушених осциловања терета по генералисаним координатама θ и ψ услед убрзања портала задатог према слици 3.1.

У првом кораку, посматрају се кретања терета односно масе m_2 у подужном и бочном правцу по генералисаним координатама θ и ψ , тако што је она издвојена из система, слика 3.6.



Слика 3.6 Клаћење терета
а) у подужном правцу, б) у бочном правцу

За потребу одређивања закона клаћења терета, дефинисане су диференцијалне једначине релативног кретања материјалне тачке односно масе m_2 :

$$m_2 \vec{a}_r = \vec{F}_{pX}^{in} + \vec{F}_{pY}^{in} + \vec{G}_2 + \vec{S} \quad (3.3.a)$$

$$m_2 \vec{a}_r = \vec{F}_{pZ}^{in} + \vec{F}_{pY}^{in} + \vec{G}_2 + \vec{S} \quad (3.3.б)$$

На основу слике 3.6.а и диференцијалне једначине (3.3.а) дају се детаљи добијања закона осциловања терета у подужном правцу. Како постоји аналогија између осциловања терета у дефинисана два правца, за бочни правац биће дат само коначни облик.

У једначини (3.3.a) интезитети инерцијалних сила су једнаки:

$$F_{pX}^{in} = m_2 \ddot{x}_p(t) \cos \varphi \quad (3.4.a)$$

$$F_{pY}^{in} = m_2 \ddot{y}(t) \quad (3.4.б)$$

Када се једначина (3.3.a) пројектује на осе t и n природног триједра који је везан за масу m_2 добијају се две једначине:

$$m_2 L_u \ddot{\theta} = -G_2 \sin \theta - m_2 \ddot{x}_p \cos \theta + m_2 \ddot{y} \sin \theta \quad (3.5.a)$$

$$m_2 L_u \dot{\theta}^2 = -G_2 \cos \theta + S + m_2 \dot{x}_p \sin \theta + m_2 \dot{y} \cos \theta \quad (3.5.б)$$

Ако се усвоји да је $\ddot{y} = 0$, једначине (3.5.a) и (3.5.б) добијају облик:

$$m_2 L_u \ddot{\theta} = -G_2 \sin \theta - m_2 \ddot{x}_p \cos \theta \quad (3.6.a)$$

$$m_2 L_u \dot{\theta}^2 = -G_2 \cos \theta + S + m_2 \dot{x}_p \sin \theta \quad (3.6.б)$$

Из прве једначине (3.6.a) се одређује закон осиловања терета у подужном правцу, тако да иста добија облик:

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L_u} \sin \theta(t) = -\frac{1}{L_u} \ddot{x}_p(t) \cos \theta(t) \cos \varphi \quad (3.7)$$

Како је $\omega_t = \sqrt{\frac{g}{L_u}}$ кружна фреквенција, једначина (3.7) добија облик:

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_t^2 \sin \theta(t) = -\frac{1}{L_u} \ddot{x}_p(t) \cos \theta(t) \cos \varphi \quad (3.8)$$

За случај малих осцилација може се увести апроксимација да је угао θ мали, тако да је $\sin \theta(t) \approx \theta(t)$ и $\cos \theta(t) \approx 1$.

Сагласно уведеним апроксимацијама једначина (3.8) се линеаризује тако да добија следећи облик:

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_t^2 \theta(t) = -\frac{1}{L_u} \ddot{x}_p(t) \cos \varphi \quad (3.9)$$

Увођењем смене $a = \ddot{x}_p(t) = \ddot{x}(t)$ једначина осиловања терета у подужном правцу добија коначан облик:

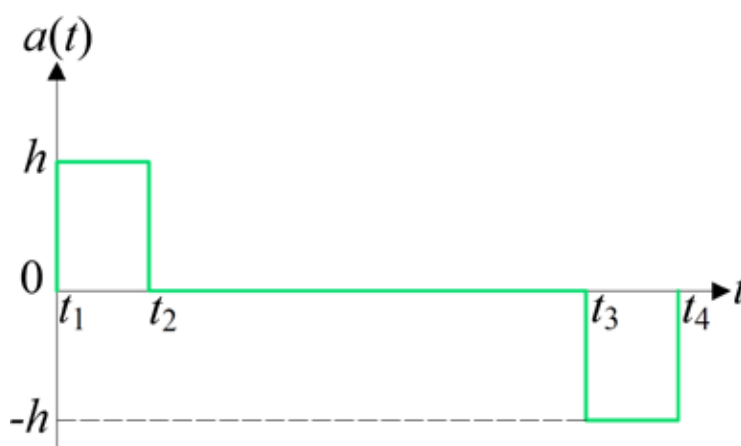
$$\ddot{\theta}(t) + \omega_t^2 \theta(t) = -\frac{1}{L_u} a(t) \cos \varphi \quad (3.10)$$

Једначина (3.10) се најпогодније решава методом Лаплсове трансформације. У првом кораку, примењујући Лаплову трансформацију на дату једначину се добија:

$$L\{\theta(s)\}(s^2 + \omega_t^2) = -\frac{1}{L_u} L\{a(s)\} \cos \varphi \quad (3.11)$$

$$L\{\theta(s)\} = -\frac{1}{L_u} L\left\{\frac{a(s)}{s^2 + \omega_t^2}\right\} \cos \varphi \quad (3.12)$$

Из кинематичких дијаграма са слике 3.1, издваја се посебно дијаграм убрзања за потребе решавања израза (3.12). Овај дијаграм је приказан на слици 3.7.



Слика 3.7 Дијаграм убрзања

Усваја се да је $a_u = a_k = h$ и $t_u = t_k = \tau$. За предрачунае се може усвојити да је $0,5(t_u + t_k) = 3...5s$ [1].

Сада, према дијаграму промене убрзања у времену, слика 3.7, израз за убрзање у Лапласовом домену се може представити у следећем облику:

$$a(s) = \frac{h}{s} (1 - e^{-t_2 s} - e^{-t_3 s} + e^{-t_4 s}) \quad (3.13)$$

где су:

- h – амплитуда улазног убрзања, и
- t_i – одговарајући временски корак на дијаграму убрзања.

Израз (3.13) добија облик:

$$L\{\theta(s)\} = -\frac{h}{L_u} L\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega_t^2)} (1 - e^{-t_2 s} - e^{-t_3 s} + e^{-t_4 s})\right\} \quad (3.14)$$

Коначно, закон осциловања терета у подужном правцу се добија тако што се израз за $\theta(s)$ трансформише у временском домену коришћењем инверзне Лапласове трансформације (користи се софтвер Mathematica® 7 [53 i 54]):

$$\begin{aligned} \theta = -\frac{h}{L_u \omega_t^2} & \left((1 - \cos \omega_t t) \right. \\ & - (1 - \cos \omega_t (t - t_2)) \text{HeavisideTheta}(t - t_2) \\ & - (1 - \cos \omega_t (t - t_3)) \text{HeavisideTheta}(t - t_3) \\ & \left. + (1 - \cos \omega_t (t - t_4)) \text{HeavisideTheta}(t - t_4) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

У другом кораку, аналогно, добија се закон осциловања у бочном правцу по генералисаној координати ψ :

$$\begin{aligned} \psi = -\frac{h}{L_u \omega_t^2} & \left((1 - \cos \omega_t t) \right. \\ & - (1 - \cos \omega_t (t - t_2)) \text{HeavisideTheta}(t - t_2) \\ & - (1 - \cos \omega_t (t - t_3)) \text{HeavisideTheta}(t - t_3) \\ & \left. + (1 - \cos \omega_t (t - t_4)) \text{HeavisideTheta}(t - t_4) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Добијени закони осциловања терета (3.15) и (3.16) представљају *Хевисајдове (степенасте) функције са линеарним полиномом*.

Доказ сигурности против превртања се врши код носећих конструкција мобилних машина где постоји могућност превртања (ауто-дизалице, портално лучке дизалице, грађевинске торањске дизалице, багери, итд.) [55]. Нестабилности и превртању дизалице највише доприноси клађење терета и то када угао осциловања терета достиже највишу тачку. Овај случај се јавља када су импулси прорачуна времена међусобно у фази. У том случају осциловање терета изазвано сваким кораком убрзања конструктивно се додаје и производи највишу амплитуду осциловања терета.

Максимална амплитуда осциловања терета може се утврдити из динамичке једначине кретања клатна у временском оквиру.

Једначине (3.15) и (3.16) показују да се максимални угао осциловања јавља када су испуњени следећи услови:

- сваки од косинусних чланова унутар израза (3.15) односно (3.16) је у фази,
- множењем косинусних чланова унутар израза (3.15) односно (3.16) одговарајућим кораком функције *HeavisideTheta* добија се вредност једнака 1 (потребно је да је време рада довољно дуго, $t \geq t_4$, како би се остварило убрзање према дијаграму).

Косинусни чланови унутар израза (3.15) односно (3.16) су у фази када се четири корака дијаграма убрзања извршавају тако што се у савршеном времену конструктивно сабирају. У најгорем случају угао осциловања расте четири пута у односу на осциловање изазвано једним кораком улазног убрзања. Максимална величина угла осциловања терета је једнака:

$$|\theta_{max}| = |\psi_{max}| = 4 \frac{h}{g} \quad (3.17)$$

Да би се произвело максимално клађење терета (клатна) потребно је да су кораци убрзања тотално у фази, односно потребно је да буду испуњена два услова.

Први услов захтева да временски интервал између првог и другог корака, као и трећег и четвртог мора бити пола осцилаторног периода τ , односно математички записано:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 = t_3 - t_2 &= (0,5 + n) \tau, i \\ t_4 - t_3 &= (0,5 + n) \tau \end{aligned} \quad (3.18)$$

где је $n = 1, 2, 3 \dots$

Временско задржавање је неопходно јер кораци у сетовима имају различите ознаке. Зато, временско задржавање је еквивалентно изазивању фазног задржавања π према супротним знаковима функције, што коначно отказује промену фаза и доводи две функције у фазу.

Други услов захтева да временски интервал између другог и трећег импулса мора садржати време задржавања вишеструког периода τ , односно математички записано:

$$t_3 - t_2 = n \tau \quad (3.19)$$

где је $n = 1, 2, 3 \dots$

Другим речима, ово важи јер други и трећи корак имају исти знак па промена фазе од 2π захтева да други и трећи корак буду у фази.

3.1.3.2

Динамичка оптерећења портала

Сагласно усвојеним генералисаним координатама осциловања динамичког модела стреле, динамички момент савијања се јавља услед осциловања терета у два правца:

- услед осциловања терета у подужном правцу, и
- услед осциловања терета у бочном правцу.

Динамички момент савијања услед осциловања у подужном правцу гласи, слика 3.6.а:

$$\begin{aligned} M_{din,p1} &= m_1 g (L_s \cos \alpha + r) \\ &+ m_2 (g + L_u \dot{\theta}^2 \cos \theta) (L_u \sin \theta + L_s \cos \alpha + r) \\ &+ m_2 L_u \dot{\theta}^2 \sin \theta (L_s \sin \alpha - L_u \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Динамички момент савијања услед осциловања у бочном правцу може бити двојак, слика 3.6.б:

$$\begin{aligned} M_{din,b1} &= m_2 (g + L_u \dot{\psi}^2 \cos \psi) L_u \sin \psi \\ &+ m_2 L_u \dot{\psi}^2 \sin \psi (L_s \sin \alpha - L_u \cos \psi) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$M_{din,b2} = m_2 L_u \dot{\psi}^2 \sin \psi (L_s \sin \alpha - L_u \cos \psi) \quad (3.22)$$

Даље, према усвојеним генералисаним координатама осциловања динамичког модела стреле, динамички момент савијања се своди у два правца:

- у подужном правцу, и
- у бочном правцу.

Динамички момент савијања у подужном правцу, на основу израза (3.20) и (3.22) гласи, слика 3.6.а:

$$\begin{aligned}
 M_{din,p} = & m_1 g (L_s \cos \alpha + r) \\
 & + m_2 (g + L_u \dot{\theta}^2 \cos \theta) (L_u \sin \theta + L_s \cos \alpha + r) \\
 & + m_2 L_u \dot{\theta}^2 \sin \theta (L_s \sin \alpha - L_u \cos \theta) \\
 & + m_2 L_u \dot{\psi}^2 \cos \psi (L_u \cos \alpha + r)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Динамички момент савијања у бочном правцу гласи, на основу израза (3.21), слика 3.6.б:

$$\begin{aligned}
 M_{din,b} = & m_2 (g + L_u \dot{\psi}^2 \cos \psi) L_u \sin \psi \\
 & + m_2 L_u \dot{\psi}^2 \sin \psi (L_s \sin \alpha - L_u \cos \psi)
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

У наставку, динамички моменти савијања у подужном и бочном правцу се свODE на места ослањања обртне стреле на порталу типа Н и Х.

3.2

МОДЕЛИРАЊЕ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ

Носећа конструкција (портал) порталне дизалице је просторна структура, односно крути просторни рам. Њена основа има димензије $L \times B$. У принципу, челична конструкција портала се састоји из горње подструктуре која се ослања на ноге портала. Све ноге портала су углавном круте. Изузетно портали великих распона изводе се са две круте ноге и две еластичне или зглобне ноге.

Основне механичке карактеристике носеће конструкције односно свих коначних елемената формираног просторног модела су модул еластичности E , модул клизања G и густина ρ .

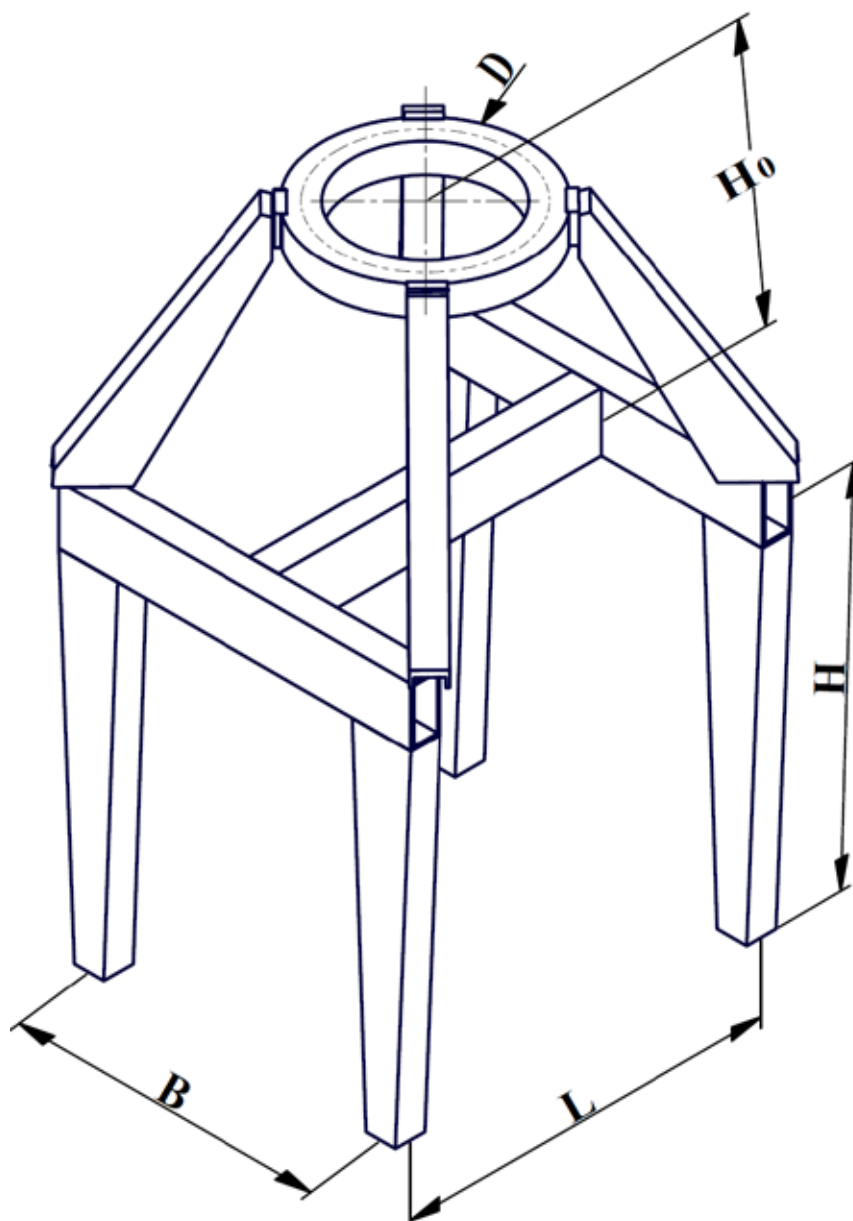
Имајући у виду да се стрела обрће око осе, закључује се да равански модел није довољан да опише динамичко понашање разматране портално-обртне дизалице. Другим речима, моделирању носеће конструкције порталне дизалице, у овом раду, се полази од претпоставке да су битна оптерећења а самим тим и динамички одговори носеће конструкције у две вертикалне равни (подужној - zx и бочној - zy). Ове равни се поклапају са правцима осциловања терета (подужни и бочни). То значи да се реални просторни систем порталне дизалице моделира као просторни модел. На пример код рамних дизалица довољан је равански модел [56].

За моделирање носеће конструкције порталне дизалице се користи прилаз са конзистентним масама [47].

Формирање еквивалентног модела носеће конструкције се спроводи на основу принципа дискретизације. У првом кораку се полази од реално изведених решења два конструкциона типа сандучасте носеће конструкције (Н и Х) порталних дизалица. У другом кораку се симплифицира (поједностављује) реални модел, да би могао да се моделира неким коначним елементима одређеног облика. На крају, у трећем кораку се формира дискретизовани модел, на коме се примењује одређени вид коначних елемената.

У овом раду је за полазни конструкциони тип носеће конструкције (портала) усвојен **тип Н**. Дискретизовани модел носеће конструкције (портала) порталне дизалице типа Н је приказан на слици 3.8.

Главне геометријске карактеристике дискретизованог модела носеће конструкције типа Н су: L – дужина портала, B – ширина портала, H – висина ногу портала, D – пречник прстена, и H_0 – растојање између рама Н и прстена.



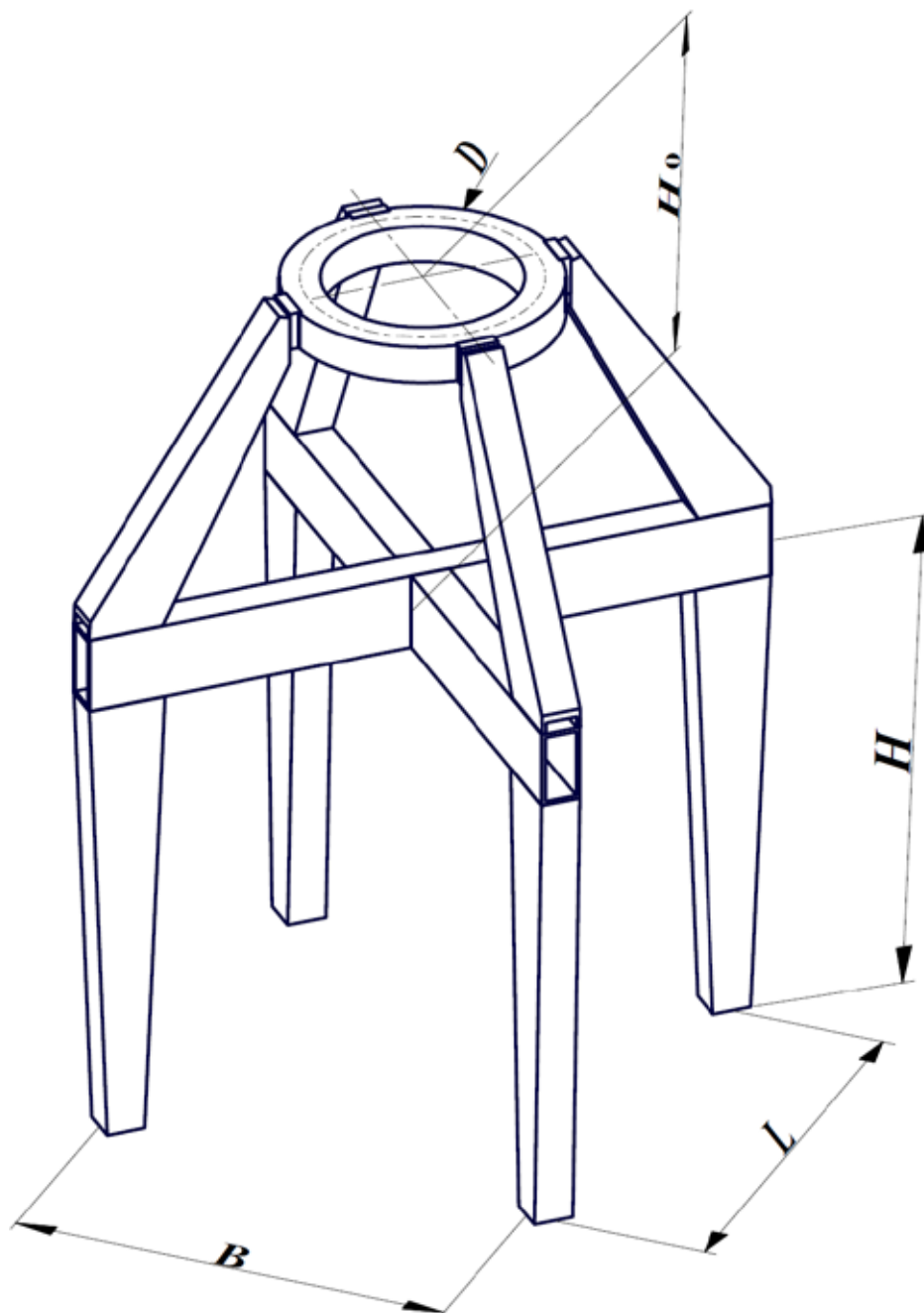
Слика 3.8 Дискретизовани модел носеће конструкције типа Н порталне дизалице

По аналогiji, одговарајућим трансформацијама формираног модела носеће конструкције порталне дизалице се могу добити други типови конструкција. Неки примери трансформације разматраног модела у моделе других типова носећих конструкција порталних дизалица су:

- модел код кога хоризонтални рам има облик Х (одузимају се хоризонтални елементи по две међусобно управне осе а додају се дијагонални елементи),
- модел код кога су две ноге круто а две ноге зглобно везане рам Н (портал опслужује два или три колосека),
- модел са ногама решеткастог типа (додају се одговарајући коси и хоризонтални елементи),
- модел решеткастог типа (додају се одговарајући коси и хоризонтални елементи), и др.

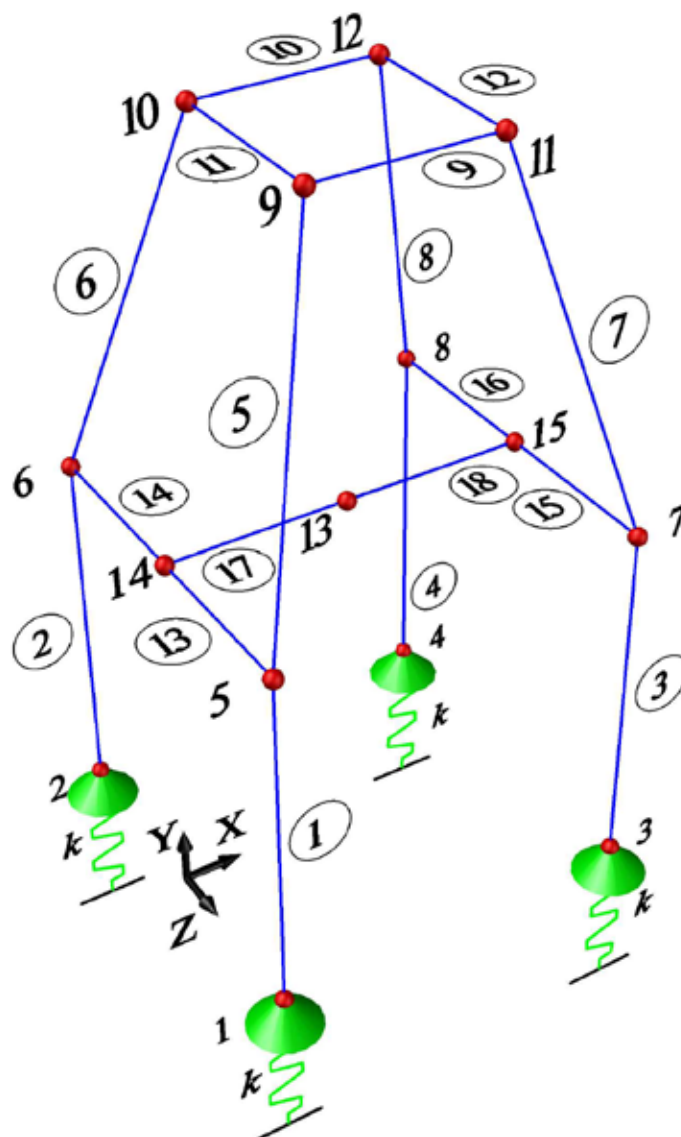
Други конструкциони тип носеће конструкције (портала) порталне дизалице, који се у овом раду разматра, је **тип X**. Његов дискретизовани модел носеће конструкције (портала) порталне дизалице је приказан на слици 3.9.

Модел портала типа X се разликује од модела портала типа Н само по хоризонталном рамном носачу. То значи да модел портала X има све главне геометријске карактеристике као и дискретизовани модел носеће конструкције типа Н. Поред ових геометријских карактеристика за модел X се може увести једна изведена геометријска карактеристика, а то је дужина дијагоналних елемената хоризонталног носача X.



Слика 3.9 Дискретизовани модел носеће конструкције типа X порталне дизалице

На основу дискретизованог модела Н, слика 3.8, формиран је коначно-елементни просторни модел разматраног типа порталне дизалице, слика 3.10. Приказани КЕ модел носеће конструкције порталне дизалице се састоји од 15 чворова и 18 коначних елемената. Детаљније речено, са аспекта подструктурних делова сруктуре дизалице, први подструктурни део односно ноге се састоје од 1 коначног елемента који су означени бројевима $n = 1 \dots 4$. Други подструктурни део односно коси стубови се састоје од једног коначног елемента који су означени бројевима $n = 5 \dots 8$. Трећи подструктурни део односно прстен се састоји од 4 коначна елемента који су означени бројевима $n = 9 \dots 12$. На крају, четврти подструктурни део односно хоризонтални рам типа Н се састоји од 6 коначних елемента који су означени бројевима $n = 13 \dots 18$. Модел је ослоњен на четири еластична ослононца са крутошћу k .



Слика 3.10 Коначно-елементни модел носеће конструкције типа Н порталне дизалице

KE модел је равномерно дискретизован на елементе чије дужине су дефинисане следећим изразима:

$$l_n = H, \quad n = 1 \dots 4 \quad (3.25.a)$$

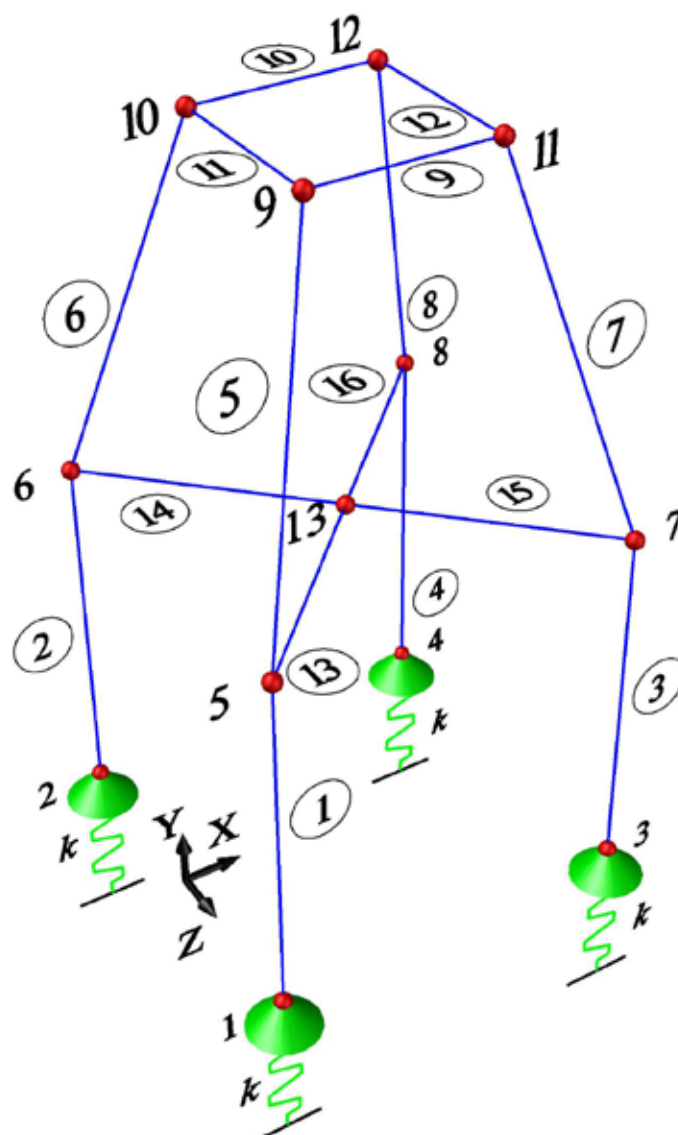
$$l_n = \sqrt{\left(\frac{L-D}{2}\right)^2 + \left(\frac{B-D}{2}\right)^2 + H_0^2}, \quad n = 5 \dots 8 \quad (3.25.б)$$

$$l_n = \frac{D}{2}\sqrt{2}, \quad n = 9 \dots 12 \quad (3.25.в)$$

$$l_n = \frac{B}{2}, \quad n = 13 \dots 16 \quad (3.25.г)$$

$$l_n = \frac{L}{2}, \quad n = 17 \dots 18 \quad (3.25.д)$$

Аналогно, на основу дискретизованог модела портала типа X, слика 3.9, формиран је његов коначно-елементни просторни модел, слика 3.11.



Слика 3.11 Коначно-елементни модел носеће конструкције типа X порталне дизалице

КЕ модел носеће конструкције типа Х порталне дизалице се састоји од 13 чворова и 16 коначних елемената, слика 3.11. Прва три подструктурна дела овог модела су потпуно иста као код модела Н. Четврти подструктурни део је хоризонтални рам типа Х, који се састоји од 4 коначна елемента који су означени бројевима $n = 13 \dots 16$. Модел је ослоњен на четири еластична ослононца са крутошћу k .

Дужина елемената хоризонталног рама Х је дефинисана следећим изразом:

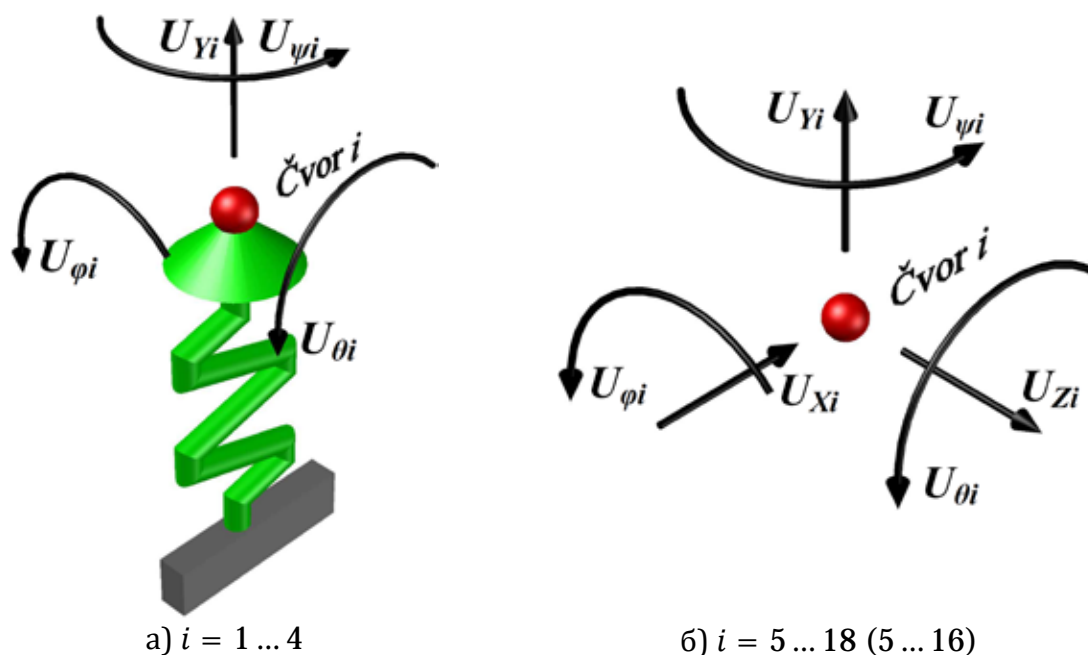
$$l_n = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2}, \quad n = 13 \dots 16 \quad (3.26)$$

Формирани КЕ модели носеће конструкције (тип Н и Х) су релативно једноставни, али сасвим довољни за потребе статичке и динамичке анализе ових и сличних типова конструкција порталних дизалица. За разматране типове конструкција ова чињеница ће бити потврђена у поглављу са бројним примером.

3.2.1

Чворови

Формирани просторни коначно-елементни модел носеће конструкције порталне дизалице има 15 (13) чворова. Пошто је у питању просторни модел чвор може имати максимално шест степени слободе, тј. једно вертикално померање, 2 хоризонтална померања и три ротације око одговарајућих оса. Чворови $i = 1 \dots 4$, који представљају еластичне ослоноце преко којих је структура дизалице ослоњена, имају по четири степена слободе односно онемогућена су померања у два хоризонтална правца, слика 3.12.а. Сви остали чворови $i = 5 \dots 18$ (5...16) имају шест степени слободе, слика 3.12.б.



а) $i = 1 \dots 4$

б) $i = 5 \dots 18$ (5...16)

Слика 3.12 Чворови коначно-елементног модела

а) чворови еластичних ослонаца, б) остали чворови

Померања чворова носеће конструкције порталне дизалице у динамичкој анализи применом МКЕ представљају генералисане координате. Конкретно, за разматране Н и Х типове носеће конструкције порталне дизалице вектори померања коначно-елементних модела гласе:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{Y1} \\ U_{\psi1} \\ U_{\theta1} \\ U_{\varphi1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{Y4} \\ U_{\psi4} \\ U_{\theta4} \\ U_{\varphi4} \\ U_{X5} \\ U_{Y5} \\ U_{Z5} \\ U_{\psi5} \\ U_{\theta5} \\ U_{\varphi5} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{X18} \\ U_{Y18} \\ U_{Z18} \\ U_{\psi18} \\ U_{\theta18} \\ U_{\varphi18} \end{pmatrix} \quad (3.27.a)$$

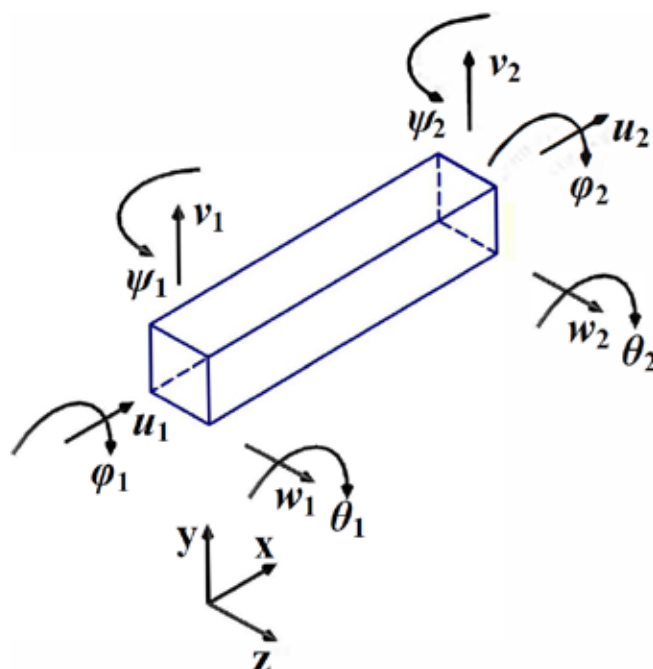
$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{Y1} \\ U_{\psi1} \\ U_{\theta1} \\ U_{\varphi1} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{Y4} \\ U_{\psi4} \\ U_{\theta4} \\ U_{\varphi4} \\ U_{X5} \\ U_{Y5} \\ U_{Z5} \\ U_{\psi5} \\ U_{\theta5} \\ U_{\varphi5} \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{X16} \\ U_{Y16} \\ U_{Z16} \\ U_{\psi16} \\ U_{\theta16} \\ U_{\varphi16} \end{pmatrix} \quad (3.27.6)$$

Први и други извод по времену дефинисаног вектора померања $\dot{\mathbf{U}}$ и $\ddot{\mathbf{U}}$ представљају векторе брзина и убрзања.

3.2.2

Коначни елементи

Приказани просторни КЕ модел је формиран од линијских коначних елемената који могу бити оптерећени на затезање/притискање, савијање и увијање, слика 3.13.



Слика 3.13 Просторни коначни елемент

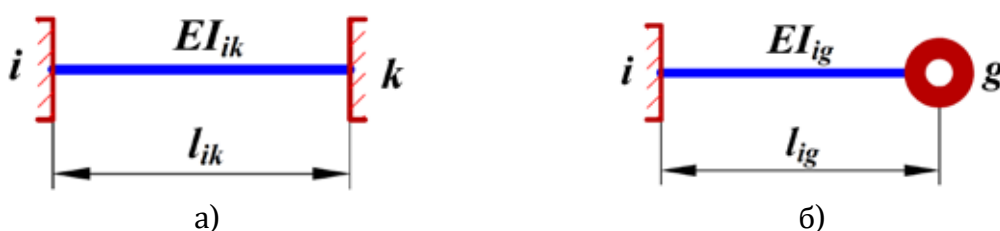
Сагласно овоме важе следеће основне претпоставке:

- за аксијалне деформације елемената важи Хуков закон, и
- за попречне деформације елемената важи теорија Бернули-Ојлера.

У Србији, за овако дефинисани коначни елемент преовлађује термин гредни коначни елемент. Као пример се може навести литература [55]. Гредни КЕ је комбинација просторног елемента типа штапа и елемента типа носача, тако да су погодни за просторну статичку и динамичку анализу.

Код моделирања носећих конструкција се највише користе два типа гредних коначних елемената:

- коначни елемент типа ik , слика 3.14.а, и
- коначни елемент типа ig , слика 3.14.б.



Слика 3.14 Типови коначних елемената

а) коначни елемент типа ik , б) коначни елемент типа ig

Ређе се користе коначни елементи типа gg .

Разматрана носећа конструкција порталне дизалице, је подељена на 18 (16) коначних елемената, слика 3.10 (слика 3.11).

3.2.3

Матрица крутости и маса коначног елемента

За динамичку анализу конструкције потребно је одредити матрицу крутости и матрицу инерције. Одређивање матрица крутости и маса у практичним прорачунима је једноставно.

При одређивању матрице крутости полази се од везе између вектора генералисаних сила и вектора генералисаних померања q :

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}q \quad (3.28)$$

При одређивању матрице маса полази се од везе између вектора генералисаних инерцијалних сила F_{in} и вектора генералисаних убрзања \ddot{q} :

$$\mathbf{F}^{in} = -\mathbf{m}\ddot{q} \quad (3.29)$$

Одговарајућа матрица крутости и маса линијског елемента дефинисане су на основу интерполационих функција гласе:

$$\mathbf{k} = \int_V E \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.30)$$

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.31)$$

где су:

- \mathbf{N} – матрица интерполационих функција,
- E – модул еластичности материјала структуре, и
- ρ – модул еластичности материјала структуре.

Матрица маса елемента дефинисана изразом (3.31) назива се конзинстентна матрица маса.

Матрице крутости и маса елемената могу се одредити применом принципа суперпозиције, односно раздвајањем просторног напонског стања елемената на:

- аксијално напрезање,
- савијање око осе z у равни xy ,
- савијање око осе y у равни xz , и
- обртање око осе x (торзија).

Вектори генералисаних сила и вектори генералисаних померања који одговарају дефинисаним напонским стањима гласе:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^T &= [N_i \quad N_k] \\ \mathbf{F}_{sz}^T &= [T_{yi} \quad M_{zi} \quad T_{yk} \quad M_{zk}] \\ \mathbf{F}_{sy}^T &= [T_{zi} \quad M_{yi} \quad T_{zk} \quad M_{yk}] \\ \mathbf{F}_t^T &= [M_{xi} \quad M_{xk}] \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_a^T &= [u_i \quad u_k] \\
\mathbf{q}_{sz}^T &= [v_i \quad \varphi_i \quad v_k \quad \varphi_k] \\
\mathbf{q}_{sy}^T &= [w_i \quad \theta_i \quad w_k \quad \theta_k] \\
\mathbf{q}_t^T &= [\psi_i \quad \psi_k]
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Сада, веза између вектора генералисаних сила \mathbf{F} и вектора генералисаних померања \mathbf{q} може да се прикаже у облику:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_a \\ \mathbf{F}_{sz} \\ \mathbf{F}_{sy} \\ \mathbf{F}_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{sz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{k}_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{k}_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_{sz} \\ \mathbf{q}_{sy} \\ \mathbf{q}_t \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

где су:

- \mathbf{k}_a – матрица крутости подужних осцилација елемента,
- \mathbf{k}_{sz} – матрица крутости попречних осцилација елемента у хz равни,
- \mathbf{k}_{sy} – матрица крутости попречних осцилација елемента у ху равни, и
- \mathbf{k}_t – матрица крутости торзионих осцилација елемента.

Вектор генералисаних инерцијалних сила \mathbf{F}^{in} и вектори генералисаних убрзања $\ddot{\mathbf{q}}$ који одговарају дефинисаним напонским стањима гласе:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_a^{inT} &= [N_i^{in} \quad N_k^{in}] \\
\mathbf{F}_{sz}^{inT} &= [T_{yi}^{in} \quad M_{zi}^{in} \quad T_{yk}^{in} \quad M_{zk}^{in}] \\
\mathbf{F}_{sy}^{inT} &= [T_{zi}^{in} \quad M_{yi}^{in} \quad T_{zk}^{in} \quad M_{yk}^{in}] \\
\mathbf{F}_t^{inT} &= [M_{xi}^{in} \quad M_{xk}^{in}]
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{q}}_a^T &= [\ddot{u}_i \quad \ddot{u}_k] \\
\ddot{\mathbf{q}}_{sz}^T &= [\ddot{v}_i \quad \ddot{\varphi}_i \quad \ddot{v}_k \quad \ddot{\varphi}_k] \\
\ddot{\mathbf{q}}_{sy}^T &= [\ddot{w}_i \quad \ddot{\theta}_i \quad \ddot{w}_k \quad \ddot{\theta}_k] \\
\ddot{\mathbf{q}}_t^T &= [\ddot{\psi}_i \quad \ddot{\psi}_k]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Сада, веза између вектора генералисаних сила \mathbf{F}^{in} и вектора генералисаних померања $\ddot{\mathbf{q}}$ може да се прикаже у облику:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_a^{in} \\ \mathbf{F}_{sz}^{in} \\ \mathbf{F}_{sy}^{in} \\ \mathbf{F}_t^{in} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_{sz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{m}_{sy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{m}_t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_{sz} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{sy} \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

где су:

- \mathbf{m}_a – матрица маса подужних осцилација елемента,
- \mathbf{m}_{sz} – матрица маса попречних осцилација елемента у хz равни,
- \mathbf{m}_{sy} – матрица маса попречних осцилација елемента у ху равни, и
- \mathbf{m}_t – матрица маса торзионих осцилација елемента.

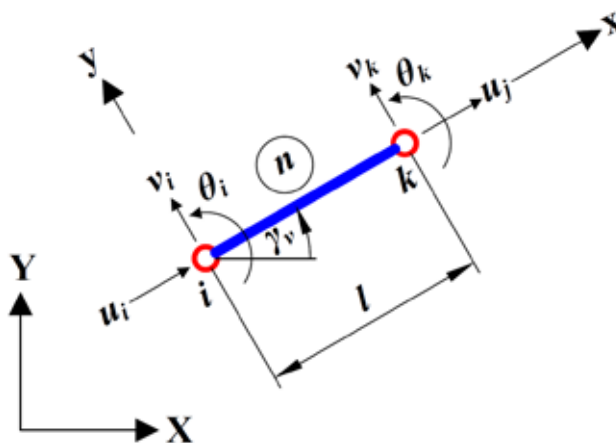
3.2.3.1

Интерполационе функције коначног елемента

3.2.3.1.1

Коначни елемент типа ik

На слици 3.15 приказана су померања просторног гредног КЕ типа ik у локалном координатном систему у равни XU .



Слика 3.15 Померања гредног КЕ типа ik у локалном координатном систему

Са слике 3.15 се види да оба чвора просторног гредног КЕ типа ik у локалном координатном систему имају шест степени слободе (аксијално померање, два попречна померања и три ротације око оса). Вектор померања почетног i и крајњег k чвора n – тог елемента у локалном координатном систему гласи:

$$\mathbf{u} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \psi_i \quad \theta_i \quad \varphi_i \quad u_k \quad v_k \quad w_k \quad \psi_k \quad \theta_k \quad \varphi_k] \quad (3.38)$$

Основне механичке карактеристике n – тог елемента су:

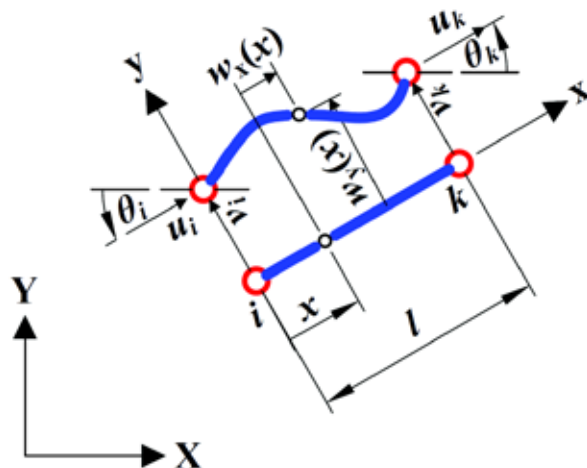
- ρ_n – густина материјала,
- E – модул еластичности, и
- G – модул клизања,

док су основне статичке карактеристике истог елемента:

- A_n – површина пресека,
- I_{zn} – аксијални момент инерције пресека за главну осу z ,
- I_{yn} – аксијални момент инерције пресека за главну осу y ,
- I_{xn} – торзиони момент инерције пресека за главну осу x .

Како су померања чворова непознате величине, то је потребно успоставити њихову директну везу са величином померања у било којој тачки елемента помоћу интерполационих функција [57].

За потребу дефинисања интерполационих функција у подужном правцу и равни XU на слици 3.16 је приказано произвољно померање тачке на растојању x од почетног чвора код КЕ типа ik .



Слика 3.16 Произвољно померање тачке на растојању x од почетног чвора у равни xu код КЕ типа ik

Са слике 3.16 се види да посматрано померање код КЕ има две компоненте:

- померање у правцу подужне осе КЕ, и
- померање попречно у на осу КЕ.

За КЕ типа ik , подужно померање било које тачке на КЕ, на растојању x од почетног чвора, се може представити у облику:

$$w_x(x) = N_1(x)u_i + N_7(x)u_k \quad (3.39)$$

док се њено попречно померање у равни xu може представити у облику:

$$w_y(x) = N_2(x)u_i + N_5(x)\varphi_i + N_8(x)u_k + N_{11}(x)\varphi_k \quad (3.40)$$

Аналогно, попречно померање у равни xz може се представити у облику:

$$w_z(x) = N_3(x)u_i + N_6(x)\varphi_i + N_9(x)u_k + N_{12}(x)\varphi_k \quad (3.41)$$

Угаоно обртање око осе x може се представити у облику:

$$\varphi_x(x) = N_4(x)\varphi_i + N_{10}(x)\varphi_k \quad (3.42)$$

За КЕ типа ik константног попречног пресека изложен аксијалном напрезању парцијални вектор интерполационих функција, садржан у изразу (3.39), гласи:

$$\mathbf{N}_{ax}^T = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_7(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.43)$$

За КЕ типа ik константног попречног пресека изложен савијању у равни xu парцијални вектор интерполационих функција (Хермитови полиноми прве врсте), садржан у изразу (3.40), гласи:

$$\mathbf{N}_{sy}^T = \begin{bmatrix} N_2(x) \\ N_5(x) \\ N_8(x) \\ N_{11}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ x - 2l\xi^2 + l\xi^3 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ -l\xi^2 + l\xi^3 \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.44)$$

Аналогно, за КЕ типа ik константног попречног пресека изложен савијању у равни xz парцијални вектор интерполационих функција, садржан у изразу (3.41), гласи:

$$\mathbf{N}_{sz}^T = \begin{bmatrix} N_3(x) \\ N_6(x) \\ N_9(x) \\ N_{12}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ -x + 2l\xi^2 - l\xi^3 \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ l\xi^2 - l\xi^3 \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.45)$$

Ако се за КЕ типа ik константног попречног пресека изложеног слободној торзији усвоји линеарна промена угла обртања, парцијални вектор линеарних интерполационих функција, садржан у изразу (3.42), гласи:

$$\mathbf{N}_t^T = \begin{bmatrix} N_4(x) \\ N_{10}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.46)$$

Коначно, вектор интерполационих функција гласи:

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4(x) \\ 0 & N_5(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_6(x) & 0 \\ N_7(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_8(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{10}(x) \\ 0 & N_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{12}(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

односно:

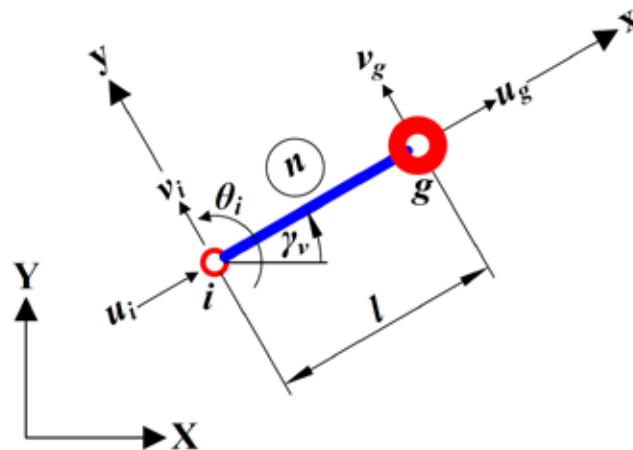
$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi \\ 0 & x - 2l\xi^2 + l\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x + 2l\xi^2 - l\xi^3 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & l\xi^2 - l\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l\xi^2 - l\xi^3 & 0 \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.48)$$

За успостављање везе МКЕ и Теорије еластичности [58], важан је први извод функција N_1, N_4, N_7 и N_{10} и други извод функција $N_2, N_3, N_5, N_6, N_8, N_9, N_{11}$ и N_{12} . У предметном истраживању први и други извод интерполационих функција није потребан. На пример, изводи интерполационих функција се користе при истраживању помичног оптерећења [56].

3.2.3.1.2

Коначни елемент типа ig

На слици 3.17 су приказана померања услед аксијалног напрезања и свијања у равни ху гредног КЕ типа ig у локалном координатном систему.

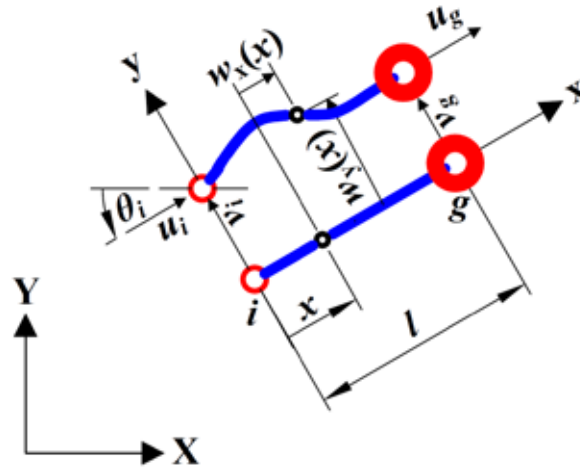


Слика 3.17 Померања гредног КЕ типа ig у локалном координатном систему

Са слике 3.17 се види да чвор i гредног КЕ типа ig у локалном координатном систему има шест степени слободе (аксијално померање, два попречна померања и три ротације око одговарајућих оса), док чвор g истог типа гредног КЕ у истом координатном систему има четири степена слободе (аксијално померање, два попречна померања и ротацију око x осе). Вектор померања почетног i крајњег g чвора n – тог елемента у локалном координатном систему гласи:

$$\mathbf{u} = [u_i \ v_i \ w_i \ \psi_i \ \theta_i \ \varphi_i \ u_g \ v_g \ w_g \ \varphi_g] \quad (3.49)$$

За потребу дефинисања интерполационих функција на слици 3.18 је приказано произвољно померање тачке на растојању x од почетног чвора код КЕ типа ig .



Слика 3.18 Произвољно померање тачке на растојању x од почетног чвора у равни ху код КЕ типа ig

За КЕ типа ig , подужно померање било које тачке на КЕ, на растојању x од почетног чвора, се може представити у облику:

$$w_x(x) = N_1(x)u_i + N_7(x)u_g \quad (3.50)$$

док се њено попречно померање у равни ху може представити у облику:

$$w_y(x) = N_2(x)u_i + N_5(x)\varphi_i + N_8(x)u_g \quad (3.51)$$

Аналогно, попречно померање у равни хz може се представити у облику:

$$w_z(x) = N_3(x)u_i + N_6(x)\varphi_i + N_9(x)u_g \quad (3.52)$$

Угаоно обртање око осе х може се представити у облику:

$$\varphi_x(x) = N_4(x)\varphi_i + N_{10}(x)\varphi_g \quad (3.53)$$

За КЕ типа ig константног попречног пресека изложен савијању у равни ху парцијални вектор интерполационих функција (Хермитеови полиноми прве врсте), садржан у изразу (3.47), гласи:

$$\mathbf{N}_{ax}^T = \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_7(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.54)$$

За КЕ типа ig константног попречног пресека изложен савијању у равни ху парцијални вектор интерполационих функција (Хермитеови полиноми прве врсте), садржан у изразу (3.51), гласи:

$$\mathbf{N}_{sy}^T = \begin{bmatrix} N_2(x) \\ N_5(x) \\ N_8(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 \\ x - \frac{3}{2}l\xi^2 + \frac{1}{2}l\xi^3 \\ \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.55)$$

Аналогно, за КЕ типа *ig* константног попречног пресека изложен савијању у равни *xz* парцијални вектор интерполационих функција, садржан у изразу (3.52), гласи:

$$\mathbf{N}_{sz}^T = \begin{bmatrix} N_3(x) \\ N_6(x) \\ N_9(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^3 \\ -x + \frac{3}{2}l\xi^2 - \frac{1}{2}l\xi^3 \\ \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\xi^3 \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.56)$$

Ако се за КЕ типа *ig* константног попречног пресека изложеног слободној торзији усвоји линеарна промена угла обртања, парцијални вектор линеарних интерполационих функција, садржан у изразу (3.53), гласи:

$$\mathbf{N}_t^T = \begin{bmatrix} N_4(x) \\ N_{10}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.57)$$

Коначно, вектор интерполационих функција гласи:

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4(x) \\ 0 & N_5(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_6(x) & 0 \\ N_7(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_8(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_9(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{10}(x) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

односно:

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi \\ 0 & x - 2l\xi^2 + l\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x + 2l\xi^2 - l\xi^3 & 0 \\ \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\xi^2 - 2\xi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi \end{bmatrix}, \xi = \frac{x}{l} \quad (3.59)$$

3.2.3.2

Матрица крутости коначног елемента

Матрица крутости подужних осцилација гредног коначног елемента типа ik у локалном координатном систему, на основу израза (3.30) и (3.44), гласи:

$$\mathbf{k}_a = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \quad (3.60)$$

Матрица крутости попречних осцилација гредног коначног елемента типа ik у xz равни, на основу израза (3.30) и (3.45), гласи:

$$\mathbf{k}_{sz} = \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI_z}{l^3} \quad (3.61)$$

Матрица крутости попречних осцилација гредног коначног елемента типа ik у xy равни, на основу израза (3.30) и (3.46), гласи:

$$\mathbf{k}_{sy} = \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI_y}{l^3} \quad (3.62)$$

Матрица крутости торзионих осцилација гредног коначног елемента типа ik у локалном координатном систему, на основу израза (3.27) и (3.44), гласи:

$$\mathbf{k}_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{GI_x}{l} \quad (3.63)$$

Матрица крутости гредног елемента у простору се формира од парцијалних матрица крутости \mathbf{k}_a , \mathbf{k}_{sz} , \mathbf{k}_{sy} и \mathbf{k}_t , тако се њихови елементи распоређују на одговарајуће позиције према одговарајућем редоследу генералисаних померања и генералисаних сила, (3.64).

Аналогним поступком се формира матрица крутости елемента типа ig у простору на основу дефинисаних интерполационих функција у поднаслову 3.2.3.1.2. Она се овде неће давати јер у разматраним моделима немамо коначне елементе типа ig .

Матрица крутости **простог штапа** у локалном систему гласи:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \quad (3.65)$$

Аналогно, матрица крутости **еластичног ослонца** у локалном систему гласи:

$$\mathbf{k}_o = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

где је k крутост еластичног ослонца.

3.2.3.3

Матрица маса коначног елемента

Матрица маса подужних осцилација гредног коначног елемента типа ik у локалном координатном систему, на основу израза (3.31) и (3.54), гласи:

$$\mathbf{m}_a = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\rho Al}{6} \quad (3.67)$$

Матрица маса попречних осцилација гредног коначног елемента типа ik у хз равни, на основу израза (3.31) и (3.55), гласи:

$$\mathbf{m}_{sz} = \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{\rho Al}{420} \quad (3.68)$$

Матрица маса попречних осцилација гредног коначног елемента типа ik у ху равни, на основу израза (3.31) и (3.56), гласи:

$$\mathbf{m}_{sy} = \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{\rho Al}{420} \quad (3.69)$$

Матрица маса торзионих осцилација гредног коначног елемента типа ik у локалном координатном систему, на основу израза (3.31) и (3.57), гласи:

$$\mathbf{m}_t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{\rho I_t l}{6} \quad (3.70)$$

3.2.4 Трансформациона матрица

Прелазак из локалног у глобални координатни систем се остварује помоћу следеће трансформационе матрице:

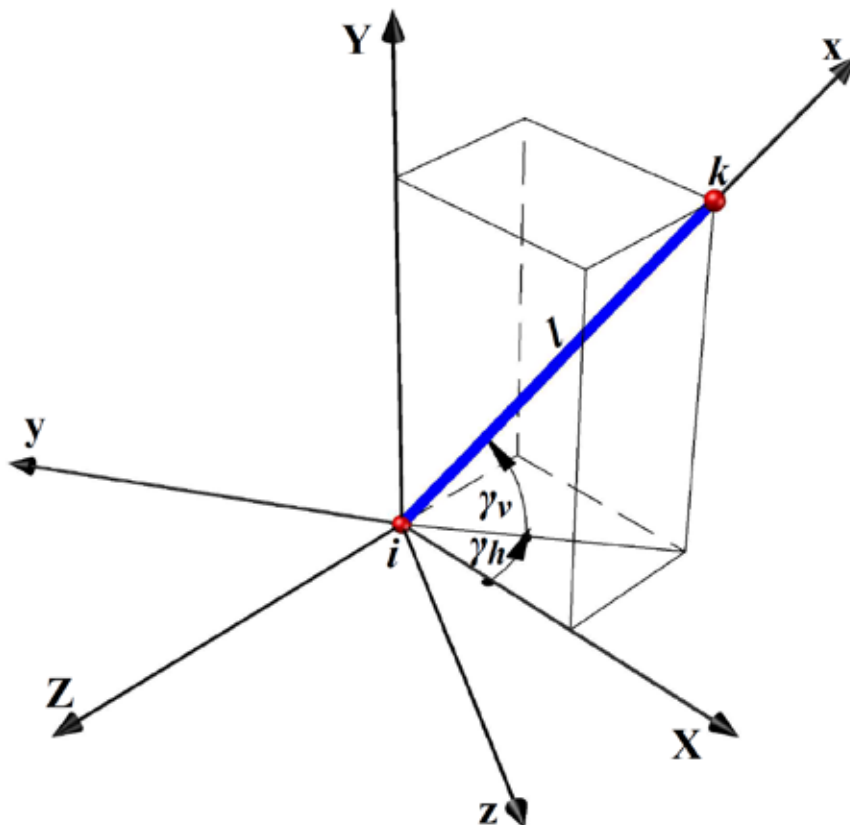
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (3.72)$$

где је \mathbf{t} матрица трансформације вектора.

Матрица трансформације вектора за општи случај гласи:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos X, x & \cos Y, x & \cos Z, x \\ \cos X, y & \cos Y, y & \cos Z, y \\ \cos X, z & \cos Y, z & \cos Z, z \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

На слици 3.19 је приказана 3D трансформација координата.



Слика 3.19 3D трансформација координата

Према слици 3.19 дефинишу се дијагонални чланови матрице (3.73)

$$\lambda = \cos X, x = \frac{X_k - X_i}{l} \quad (3.74a)$$

$$\mu = \cos Y, y = \frac{Y_k - Y_i}{l} \quad (3.74б)$$

$$v = \cos Z, z = \frac{Z_k - Z_i}{l} \quad (3.74в)$$

где су:

- $(X_i, Y_i, Z_i), (X_k, Y_k, Z_k)$ – координате тачака i и k ,
- l – дужина штапа ik (3.75),

$$l = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2 + (Z_k - Z_i)^2} \quad (3.75)$$

Углови θ_h, θ_v и θ_l су једнаки:

$$\sin \gamma_h = \frac{v}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \quad (3.76a)$$

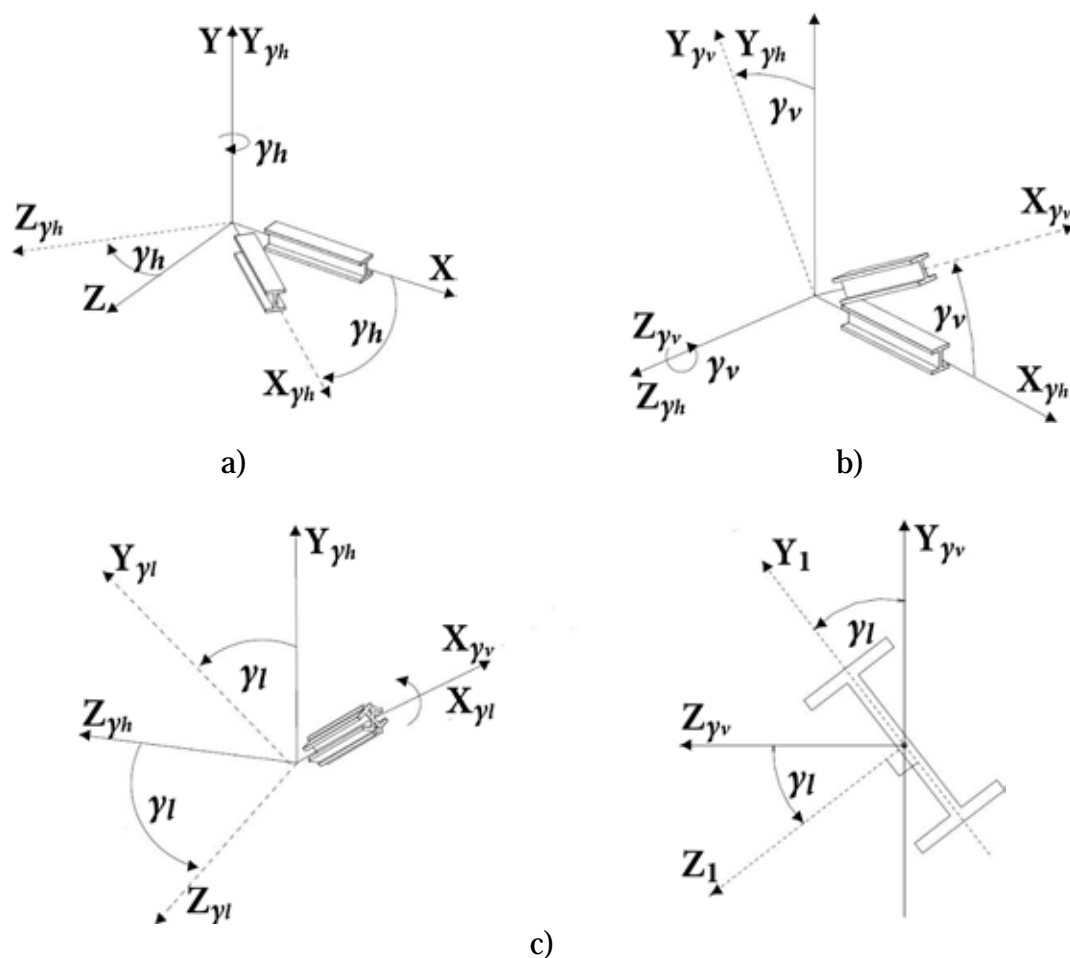
$$\cos \gamma_h = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + v^2}} \quad (3.76б)$$

$$\sin \gamma_v = \mu \quad (3.76в)$$

$$\cos \gamma_v = \sqrt{\lambda^2 + v^2} \quad (3.76г)$$

Врше се три ротације координатног система XYZ око три осе, слика 3.20, и то:

- 1) ротација координатног система XYZ око осе Y за угао θ_h чиме се добија нови координатни систем $X_{\gamma_h} Y_{\gamma_h} Z_{\gamma_h}$, слика 3.20.а,
- 2) ротација ново добијене осе Z_{γ_h} за угао γ_v док се оса X_{γ_h} не поклопи са осом x , слика 3.20.б, и
- 3) ротација око осе X_{γ_v} за угао γ_l па се систем XYZ поклапа са системом x, y, z , слика 3.20.в.



Слика 3.20 3D ротације

За сваку ротацију редом добија се парцијална матрица трансформације вектора:

$$\mathbf{t}_{\gamma_h} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_h & 0 & \sin \gamma_h \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma_h & 0 & \cos \gamma_h \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{t}_{\gamma_v} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_v & \sin \gamma_v & 0 \\ -\sin \gamma_v & \cos \gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{t}_{\gamma_l} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_l & \sin \gamma_l \\ 0 & -\sin \gamma_l & \cos \gamma_l \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Матрица трансформације вектора једнака је производу парцијалних матрица вектора:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\gamma_h} \mathbf{t}_{\gamma_v} \mathbf{t}_{\gamma_l} \quad (3.80)$$

односно:

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} & \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} & \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \\ \frac{-\lambda\mu \cos \gamma_l - \nu \sin \gamma_l}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} & \sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \cos \gamma_l & \frac{-\nu\mu \cos \gamma_l - \lambda \sin \gamma_l}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \\ \frac{\lambda\mu \sin \gamma_l - \nu \cos \gamma_l}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} & -\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} \sin \gamma_l & \frac{\nu\mu \sin \gamma_l + \lambda \cos \gamma_l}{\sqrt{\lambda^2 + \nu^2}} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

3.2.5

Матрица крутости и маса КЕ модела носеће конструкције

Динамичка анализа конструкције захтева да се матрице крутости и маса елемената тансформишу из локалног координатног система у глобални координатни систем.

Матрица крутости у глобалном координатном систему је једнака:

$$\mathbf{K}_n = \mathbf{T}_n^T \mathbf{k}_n \mathbf{T}_n \quad (3.82)$$

Аналогно, матрица маса у глобалном координатном систему је једнака:

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{T}_n^T \mathbf{m}_n \mathbf{T}_n \quad (3.83)$$

Компоновањем матрица (3.82) добија се матрица крутости носеће конструкције типа Н порталне дизалице:

$$[\mathbf{K}_{st}]_{90 \times 90} = \sum_0^{18} \mathbf{K}_n \quad (3.84)$$

Аналогно, добија се матрица крутости еластичних ослонаца:

$$[\mathbf{K}_o]_{16 \times 16} = \sum_0^4 \mathbf{K}_n \quad (3.85)$$

Матрица крутости целог система укључује матрицу носеће конструкције типа Н порталне дизалице и матрицу крутости еластичних ослонаца:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{st}]_{90 \times 90} + [\mathbf{K}_o]_{16 \times 16} = \sum_0^{18} \mathbf{K}_n + \sum_0^4 \mathbf{K}_n \quad (3.86)$$

Да би се извршила једначина (3.86), матрица крутости еластичних ослонаца $[\mathbf{K}_o]_{16 \times 16}$ се додавањем нула редова и нула колона проширирује у матрицу димензија 90×90 , осим за 16 степени слободе четири чвора.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{1,1} + \mathbf{k}_{1,1} & \dots & \mathbf{K}_{1,16} + \mathbf{k}_{1,16} & \mathbf{K}_{1,17} & \dots & \mathbf{K}_{1,90} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{16,1} + \mathbf{k}_{16,1} & \dots & \mathbf{K}_{16,16} + \mathbf{k}_{16,16} & \mathbf{K}_{16,17} & \dots & \mathbf{K}_{16,90} \\ \mathbf{K}_{17,1} & \dots & \mathbf{K}_{17,16} & \mathbf{K}_{17,17} & \dots & \mathbf{K}_{17,90} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{90,1} & \dots & \mathbf{K}_{90,16} & \mathbf{K}_{90,17} & \dots & \mathbf{K}_{90,90} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

Компоновањем матрица (3.83) добија се матрица маса целог система односно носеће конструкције типа Н порталне дизалице:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{st}]_{90 \times 90} = \sum_0^{18} \mathbf{M}_n \quad (3.88)$$

Аналогно, компоновањем матрица (3.82) и (3.83) добијају се матрице крутости и маса целог система порталне дизалице типа Х:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_{st}]_{78 \times 78} + [\mathbf{K}_o]_{16 \times 16} = \sum_0^{16} \mathbf{K}_n + \sum_0^4 \mathbf{K}_n \quad (3.89)$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_{st}]_{78 \times 78} = \sum_0^{16} \mathbf{M}_n \quad (3.90)$$

3.2.6

Једначина динамичке равнотеже

У овом делу раду, с обзиром да није моделиран цео систем порталне дизалице, усваја се модел дизалице укључује само степене слободе дефинисане носећом конструкцијом дизалице, тако да је вектор генералисаних координата једнак:

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{U}\} \quad (3.91)$$

Такође, у овом делу рада порталну дизалицу посматрамо као непригушен систем, тако да диференцијална једначина динамичке равнотеже гласи:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (3.92)$$

где су:

- $\ddot{\mathbf{U}}$ – вектор убрзања генералисаних координата носеће конструкције,
- \mathbf{U} – вектор померања генералисаних координата конструкције, и
- \mathbf{P} – вектор спољашњег оптерећења чворова конструкције.

Једначина (3.92) се може декомпоновати на:

- а) услове равнотеже активних и инерцијалних сила у правцу непознатих померања, и
- б) услове равнотеже активних и инерцијалних сила у правцу познатих померања,

тако да добија облик:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{nn} & \mathbf{M}_{np} \\ \mathbf{M}_{pn} & \mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \ddot{\mathbf{U}}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{nn} & \mathbf{K}_{np} \\ \mathbf{K}_{pn} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_n \\ \mathbf{P}_p \end{Bmatrix} \quad (3.93)$$

3.2.7

Фреквентни одзив

У специјалном случају када не постоји спољашње оптерећење и када се ослонци не померају и укљештења не обрћу једначина (3.93) прелази једначину слободних осцилација носеће конструкције порталне дизалице:

$$\mathbf{M}_{nn} \ddot{\mathbf{U}}_n + \mathbf{K}_{nn} \mathbf{U}_n = \mathbf{0} \quad (3.94)$$

где су:

- \mathbf{K}_{nn} – матрица крутости система у правцу непознатих померања,
- \mathbf{M}_{nn} – матрица маса система у правцу непознатих померања,
- $\ddot{\mathbf{U}}_n$ – вектор непознатих убрзања, и
- \mathbf{U}_n – вектор непознатих померања.

Матрица крутости система порталне дизалице типа Н у правцу непознатих померања из матрице крутости система (3.86) добија облик:

$$\mathbf{K}_{nn} = [\mathbf{K}_{st}]_{82 \times 82} + [\mathbf{K}_o]_{16 \times 16} \quad (3.95)$$

Матрица маса система порталне дизалице типа Н у правцу непознатих померања из матрице маса система (3.94) добија облик:

$$\mathbf{M}_{nn} = [\mathbf{M}_{st}]_{82 \times 82} \quad (3.96)$$

Аналогно, матрица крутости и матрица маса система порталне дизалице типа Х у правцу непознатих померања гласе:

$$\mathbf{K}_{nn} = [\mathbf{K}_{st}]_{70 \times 70} + [\mathbf{K}_o]_{16 \times 16} \quad (3.97)$$

$$\mathbf{M}_{nn} = [\mathbf{M}_{st}]_{70 \times 70} \quad (3.98)$$

Хомогена једначина (3.94) се користи за добијање фреквентног одзива носеће конструкције порталне дизалице. Њено решење се претпоставља у облику:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_{n0} \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.99)$$

где су:

- \mathbf{U}_{n0} – вектор амплитуда непознатих померања,
- ω – кружна фреквенција слободних непригушених осцилација, и
- α – фаза.

Заменом \mathbf{U}_n и $\ddot{\mathbf{U}}_n$ у једначину (3.94) добија се матрична једначина:

$$(\mathbf{K}_{nn} - \mathbf{M}_{nn} \omega_i^2) \mathbf{U}_{n0i} = \mathbf{0} \quad (3.100)$$

Матрична једначина (3.100) има нетривијално решење само ако је детермината система једнака нули тако да се поставља фреквентна једначина:

$$|\mathbf{K}_{nn} - \omega_i^2 \mathbf{M}_{nn}| = 0 \quad (3.101)$$

која представља алгебарску једначину n – тог реда по ω^2 .

Решавањем фреквентне једначине добијају се кружне сопствене фреквенције ω_i ($i = 1 \dots 82$ за тип Н и $i = 1 \dots 70$ за тип Х) носеће конструкције порталне дизалице.

Даље, на основу кружних сопствених фреквенција се добијају периоди осциловања, преко израза

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (3.102)$$

а на основу периода осциловања се добијају сопствене фреквенције преко израза:

$$f_i = \frac{1}{T_i} \quad (3.103)$$

Најнижа фреквенција система представља основну фреквенцију система. Она и још неколико првих следећих најнижих фреквенција су најзначајније динамичку анализу конструкција, а самим тим и разматране порталне дизалице.

На крају, решењем једначине (3.100) се одређују својствени вектори \mathbf{U}_{noi} ($i = 1 \dots 82$ за тип Н и $i = 1 \dots 70$ за тип Х).

3.2.8

Матрица пригушења КЕ модела носеће конструкције

Одговарајућа матрица пригушења линијског елемента n је дефинисана на исти начин и на основу истих интерполационих функција, (3.44), као и матрице крутости и масе, само што се уместо модула еластичности E односно густине ρ у подинтегралном изразу појављује коефицијент пригушења c , тако да иста гласи:

$$\mathbf{C}_n = \int_V c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.104)$$

Како је структура ове матрице иста као и конзистентних матрица крутости и маса, то се овако дефинисана матрица пригушења елемента n назива конзистентна матрица пригушења.

Одређивање матрице пригушења је компликовано. Проблем представља одређивање коефицијента пригушења. Наиме, није могуће дефинисати општи израз за одређивање коефицијента пригушења за конструкције различитог облика и израђене од различитог материјала. Један начин одређивања коефицијента пригушења је експерименталним путем на изведеном решењу конструкције у реалним условима. Како се проблематика ове дисертације односи на фазу анализе носеће конструкције порталне дизалице пре пројектовања и израде, то се овај начин искључује. Други начин одређивања коефицијента пригушења је преко израде умањеног модела. Са економског аспекта и овај начин се искључује. У овом случају се прибегава усвајању модела вискозног пригушења

преко теорије Рејлија [48], тако да се матрица пригушења система односно носеће конструкције порталне дизалице може представити у облику:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.105)$$

где су:

- \mathbf{M} - матрица маса система,
- \mathbf{K} - матрица крутости система, и
- α, β - фактори пригушења.

У домену линеарне динамичке анализе, применом принципа модалне анализе параметри пригушења добијају се изрази за факторе α и β :

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j(\omega_j\xi_i - \omega_i\xi_j)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (3.106)$$

$$\beta = \frac{2(\omega_j\xi_j - \omega_i\xi_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (3.107)$$

где су:

- ω_i и ω_j - кружне фреквенције осциловања, и
- ξ_i и ξ_j - коефицијенти релативних пригушења.

Конкретно, у динамичкој анализи дизалица најбитније су прве две фреквенције, тако да ће исте бити коришћене код процене фактора пригушења разматране порталне дизалице. У описаној процени фактора пригушења могу се увести две варијанте апроксимација, тако да добијамо два специјалана случаја.

У првом специјалном случају, може се увести претпоставка да су коефицијенти релативних пригушења носеће конструкције за контролне фреквенције ω_i и ω_j исти, односно $\xi = \xi_i = \xi_j$, тако да изрази за факторе пригушења добијају први простији облик:

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j\xi}{\omega_j + \omega_i} \quad (3.108)$$

$$\beta = \frac{2\xi}{\omega_j + \omega_i} \quad (3.109)$$

У другом специјалном случају, може се увести претпоставка да је пригушење пропорционално само матрици маса или матрици крутости, тако да изрази за факторе пригушења добијају други простији облик:

$$\alpha = 2\xi_i\omega_i \quad (3.110)$$

$$\beta = \frac{2\xi_i}{\omega_i} \quad (3.111)$$

Приказани поступак процене пригушења у конструкцији се спроводи уз поприличну апроксимацију реалног понашања. Несигуран избор коефицијената

пригушења утиче на амплитуде осцилација, односно на сигурност резултата динамичке анализе.

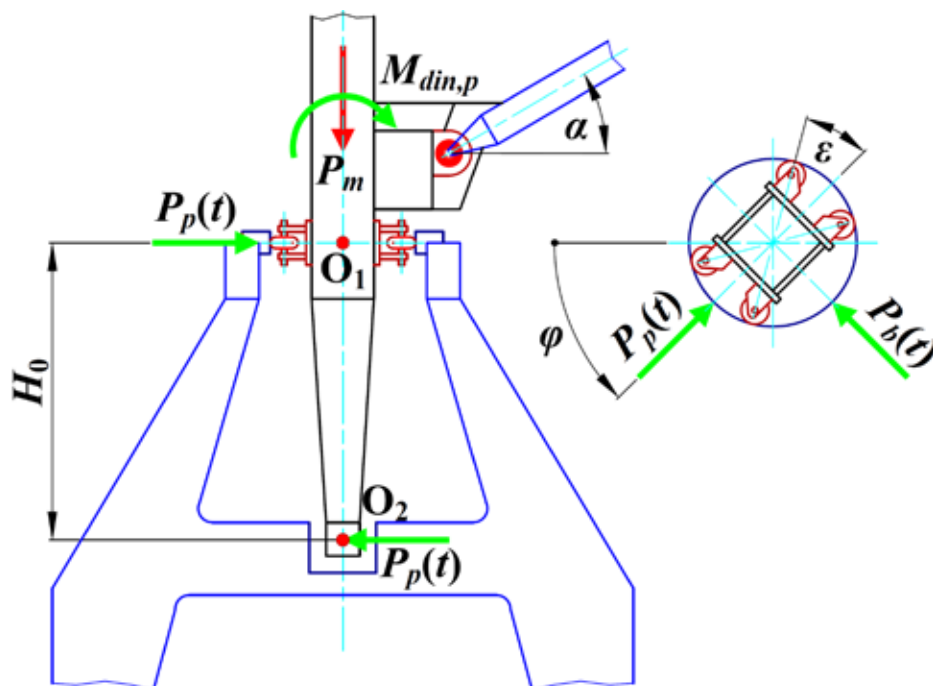
У референцама [7 и 13] коефицијенти релативних пригушења се разматрају у опсегу 0,5...7 [%]. У динамичким анализама применом МКЕ њихова максимална вредност износи 7 [%] [59]. У дисертацији наведени извори ће бити подлога за избор коефицијената пригушења.

3.3 МОДЕЛИРАЊЕ МОДЕЛА ПОРТАЛНЕ ДИЗАЛИЦЕ

Формирање математичког модела разматране порталне дизалице, са становишта динамичког одговора носеће конструкције побуђене клаћењем терета и кретањем портала, се изводи комбинвањем КЕ и аналитичког метода. Другим речима, математички модел порталне дизалице се добија комбиновањем КЕ модела носеће конструкције и динамичког модела стреле, тако што се између ова два подсистема успостави интеракција.

Интеракција између носеће конструкције порталне дизалице и стреле која се обрће представља динамичку интеракцију. Дефинисање ове интеракције омогућава разматрање динамичког одговора односно принудних осцилација носеће конструкције побуђене клаћењем терета и кретањем портала дизалице.

Сагласно поднаслову 3.1 на слици 3.21 је приказано свођење оптерећења на носећу конструкцију (портал) разматране дизалице. Другим речима, динамички моменти претурања дизалице у подужном и бочном правцу сведени су на одоварајуће спрегове сила.



Слика 3.21 Свођење динамичких момената претурања на спрегове сила

Динамички момент претурања у подужном правцу $M_{din,p}$ платформе односно обртног дела дизалице се своди на спрег динамичких сила $P_p(t)$:

$$M_{din,p} = P_p(t) \cdot H_0 \quad (3.112)$$

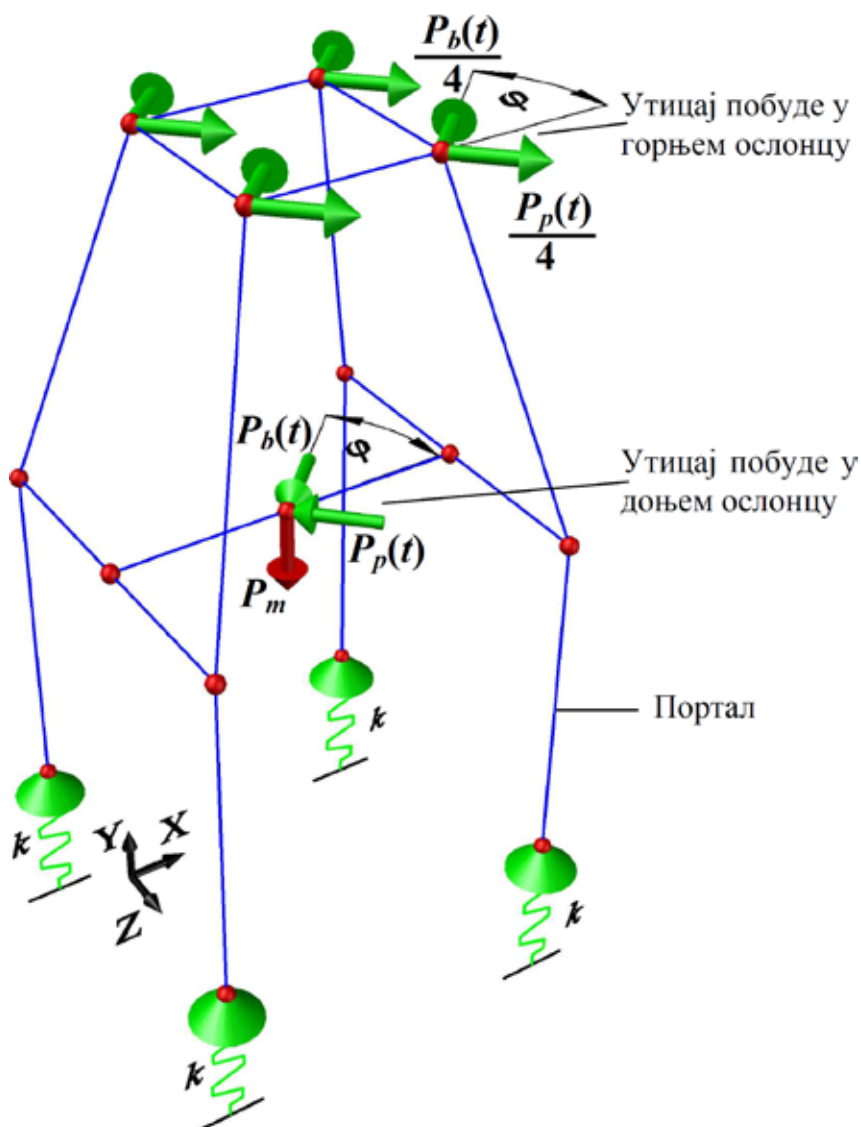
Динамички момент претурања у бочном правцу $M_{din,b}$ платформе односно обртног дела дизалице се своди на спрег динамичких сила $P_b(t)$:

$$M_{din,b} = P_b(t) \cdot H_0 \quad (3.113)$$

3.3.1

Моделирање утицаја клаћења терета на носећу конструкцију

На слици 3.22, на основу подналова 3.1 и 3.2, је представљена интерактивна побуа носеће конструкције порталне дизалице клаћењем терета и кретањем портала.



Слика 3.22 Интерактивни утицај побуде на носећу конструкцију

Утицај кретања портала и клаћења терета је представљен преко две компоненте:

- хоризонталне динамичке подужне компоненте $P_p(t)$, и
- хоризонталне динамичке бочне компоненте $P_b(t)$.

Динамички моменти, изрази (3.23) и (3.24), су редуковани на спрег хоризонталних динамичких сила $P_p(t)$ и $P_b(t)$ у чворовима коначних елемената горњег носача и централни чвор доњег носача (рам типа Н).

Динамичке силе $P_p(t)$ и $4 \times P_p(t)/4$ чине спрег сила који се супроставља динамичком моменту претурања у подужном правцу $M_{din,p}$ платформе односно обртног дела дизалице:

$$M_{din,p} = P_p(t) \cdot H_0 \quad (3.114)$$

Динамичке силе $P_b(t)$ и $4 \times P_b(t)/4$ чине спрег сила који се супроставља динамичком моменту претурања у бочном правцу $M_{din,b}$ платформе односно обртног дела дизалице:

$$M_{din,b} = P_b(t) \cdot H_0 \quad (3.115)$$

Положај ових сила се мења окретањем стреле. Правац хоризонталне подужне компоненте $P_p(t)$ се увек поклапа са осом стреле, док је правац хоризонталне бочне компоненте $P_b(t)$ увек нормалан на осу стреле.

Вертикална статичка сила P_{m1} од масе терета m_1 је редукована у централни чвор доњег носача (рам типа Н). Вертикална статичка сила P_{m2} од редуковане масе стреле m_2 је, такође, редукована у централни чвор доњег носача. Укупна вертикална статичка сила P_m која делује у централном чвору доњег ослонца стреле једнака је збиру силе од масе терета и силе од редуковане масе стреле:

$$P_m = P_{m1} + P_{m2} \quad (3.116)$$

У правцу непознатих померања субвектор спољашњих сила целог система једнак је субвектору спољашњих сила носеће конструкције типа Н порталне дизалице:

$$\mathbf{P}_n(t) = \{\mathbf{P}_n(t)\}_{82 \times 1} \quad (3.117)$$

Аналогно, у правцу непознатих померања субвектор спољашњих сила целог система порталне дизалице типа Х гласи:

$$\mathbf{P}_n(t) = \{\mathbf{P}_n(t)\}_{70 \times 1} \quad (3.118)$$

Субвектор спољашњих динамичких сила $\mathbf{P}_n(t)$ порталне дизалице типа Н се може поставити у следећем облику:

$$\mathbf{P}_n(t) = \begin{cases} \{0 & 0 & 0 & 0\}, i = 1 \dots 4 \\ \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\}, i = 5 \dots 8 \\ \left\{ \frac{P_x(t)}{4} & \frac{P_z(t)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \right\}, i = 9 \dots 12 \\ \{-P_x(t) & -P_z(t) & P_m & 0 & 0 & 0\}, i = 13 \\ \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\}, i = 14, 15 \end{cases} \quad (3.119)$$

где су:

$$P_x(t) = P_p(t) \cdot \cos \varphi + P_b(t) \cdot \sin \varphi \quad (3.120a)$$

$$P_z(t) = -P_p(t) \cdot \sin \varphi + P_b(t) \cdot \cos \varphi \quad (3.120б)$$

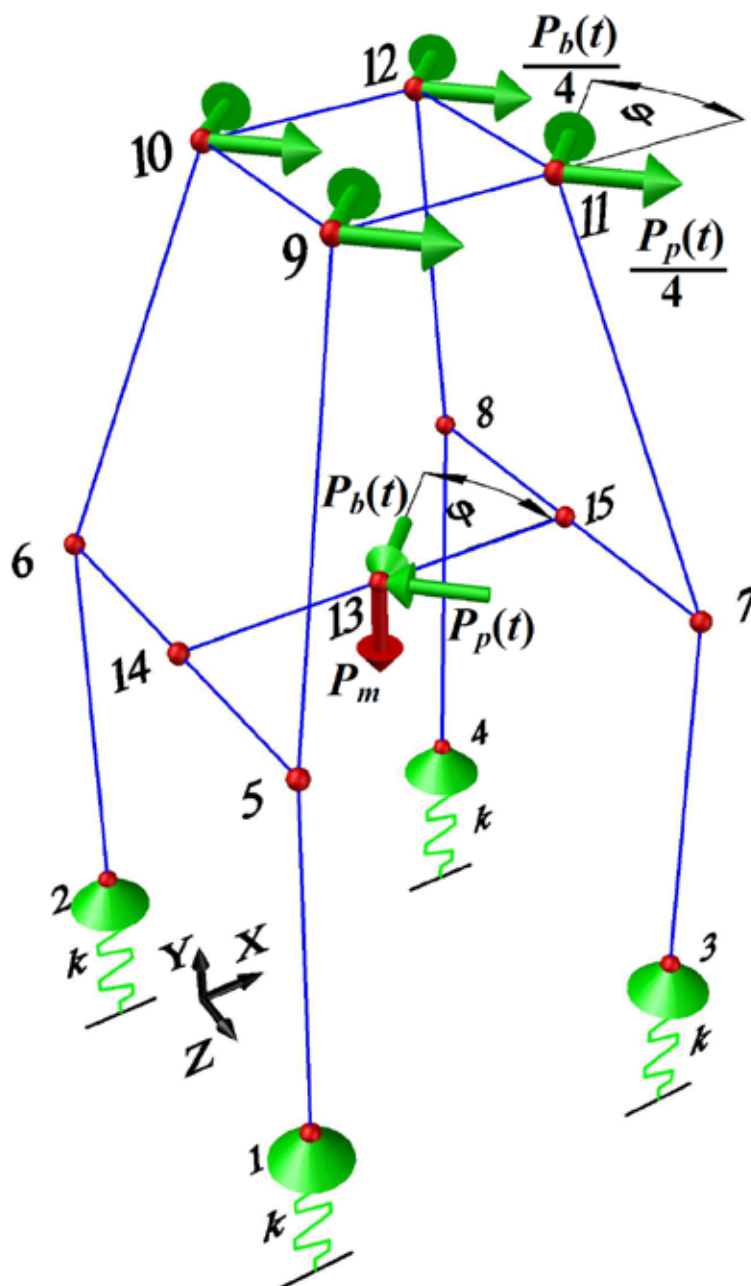
Аналогно, субвектор спољашњих сила $\mathbf{P}_n(t)$ порталне дизалице типа X гласи:

$$\mathbf{P}_n(t) = \begin{cases} \{0 & 0 & 0 & 0\}, i = 1 \dots 4 \\ \{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\}, i = 5 \dots 8 \\ \left\{ \frac{P_x(t)}{4} & \frac{P_z(t)}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \right\}, i = 9 \dots 12 \\ \{-P_x(t) & -P_z(t) & P_m & 0 & 0 & 0\}, i = 13 \end{cases} \quad (3.121)$$

3.3.2

Математички модел порталне дизалице

На слици 3.23 је приказан математички модел порталне дизалице према моделу обртне стреле. Овај модел дизалице је формиран на основу претходно формираних и анализираних модела носеће конструкције и обртне стреле.



Слика 3.23 Математички модел порталне дизалице

Модел порталне дизалице према моделу помичне силе укључује само степене слободе дефинисане носећом конструкцијом дизалице, тако да је вектор генералисаних координата остаје као у (3.49), односно:

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{U}\} \quad (3.122)$$

Сагласно формираном математичком моделу порталне дизалице, диференцијална једначина динамичке равнотеже, односно принудних пригушених осцилација носеће конструкције гласи:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \quad (3.123)$$

За формирано математички модел порталне дизалице може се одредити динамички одговор носеће конструкције побуђене клаћењем терета и кретањем портала. Другачије речено, могу се одредити динамичке величине тј. генералисана померања, брзине и убрзања носеће конструкције.

Карактеристични чворови модела носеће конструкције за добијање динамичког одговора структуре на побуду су чворови на месту еластичних ослонаца (места контакта тачкова са шином).

Како једначина динамичке равнотеже (3.123) представља диференцијалну једначину другог реда са променљивим коефицијентима, то је њено решавање сложено. Из тог разлога овде се даје кратак поступак решавања једначине динамичке равнотеже у 5 корака.

Корак 1: Одређивање матрица крутости и инерције **K** и **M** KE модела носеће конструкције разматране порталне дизалице, на основу теорије изложене у поднаслову 3.2.3.

Корак 2: Одређивање фреквентног одзива односно сопствених фреквенција носеће конструкције разматране порталне дизалице, на основу фреквентне једначине (3.101). Затим се врши издвајање прве две најниже кружне фреквенције ω_1 и ω_2 .

Корак 3: Одређивање матрице пригушења модела носеће конструкције **C**, са претходном претпоставком коефицијента пригушења ξ и проценом фактора пригушења α и β .

Корак 4: Дељење укупног временског домена τ на p корака тако да се добије одговарајући временски интервал Δt .

Корак 5: Решавање једначине (3.123) за сваки временски корак r , где r узима вредности од 0 до $p + 1$. Користи се Њумаркова метода, која припада групи нумеричких метода. Конкретно, користи се посебан случај Њумаркове методе “метод просечног убрзања”.

4

ВЕРИФИКАЦИЈА ДОБИЈЕНИХ ТЕОРИЈСКИХ ВРЕДНОСТИ ПРИМЕНОМ СОФТВЕРСКЕ СИМУЛАЦИЈЕ

За верификацију математичких модела носеће конструкције са коначно-елементним приступом односно одговарајућих теоријских резултата (нпр. фреквенција осциловања) добијених аналитичко-нумеричким путем искоришћен је програмски пакет SAP2000® 14 [60]. У овом програмском пакету су формиран коначно-елементни модели носеће конструкције (портала) порталне дизалице. Модели су формиран за два типа носеће конструкције, то:

- тип Н, и
- тип Х.

Подлоге за опште дефинисање ових модела налазе се у претходним поглављима (пре свега у трећем поглављу).

Општи приказ оба модела је дат у поднасловима у наставку, на сликама 4.1 и 4.2. Цела носећа конструкција (портал) је моделирана линијским коначним елементи типа греде.

Ноге портала су подељене на 6 коначних елемената. Прстен портала је моделиран са 12 коначних елемената. Коси стубови портала су моделирани са по 4 коначна елемента. Рам Н је моделиран са 18 коначних елемената. Рам Х је моделиран са 16 коначних елемената. Програмски пакет SAP2000® је за потребе динамичке анализе аутоматски у чворовима генерисао концентрисане масе од сваког коначног елемента.

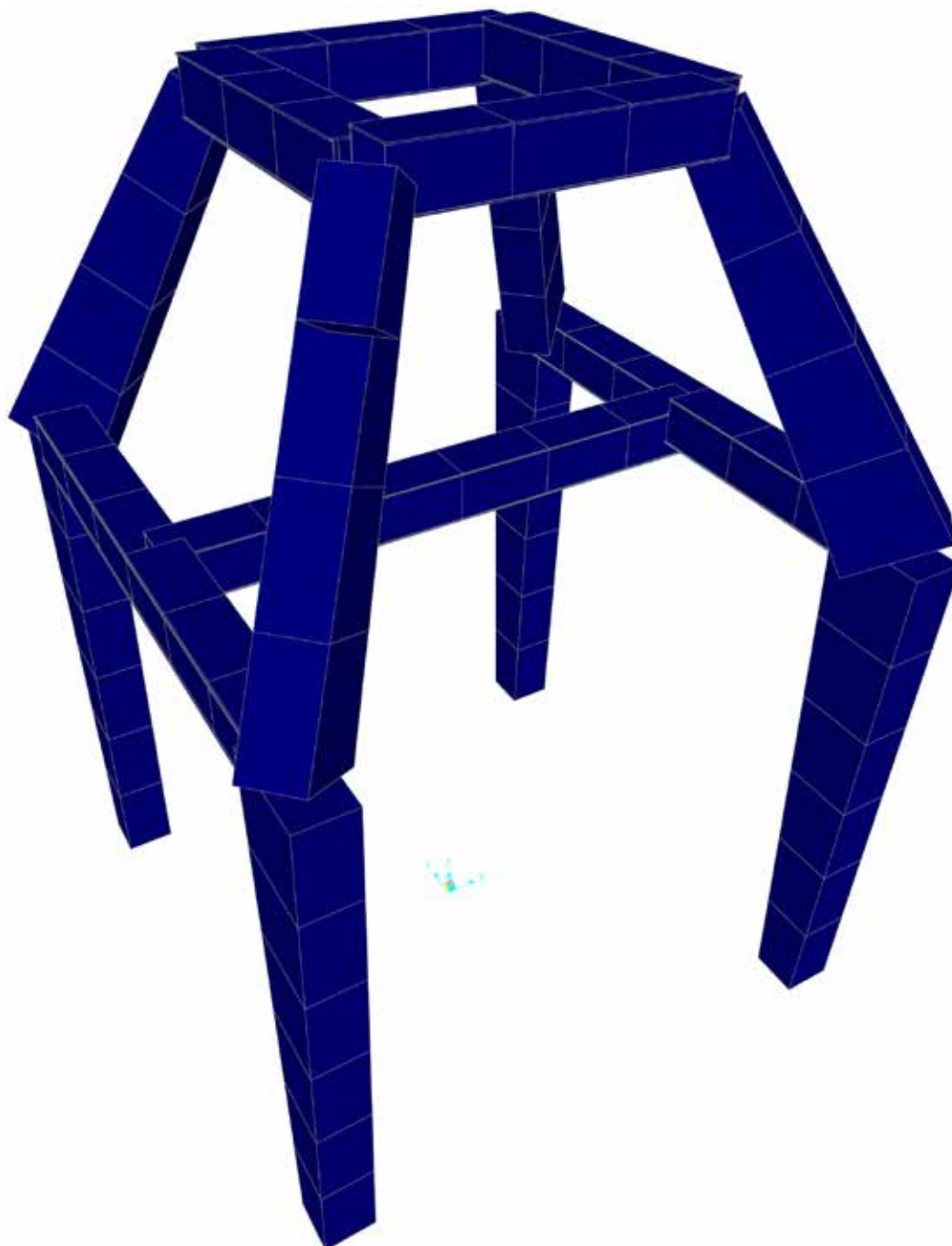
Ослонци портала су моделирани као LinearLink елементи [60] који се понаша као опруга у правцу подужне осе елемента.

Конкретно, тачна геометрија носеће конструкције биће дефинисана у следећем (петом) поглављу односно у нумеричким примерима. Такође, у истом поглављу биће спроведена симулација формираних модела.

У програму SAP2000®, за добијање фреквенција и главних облика осциловања користи се наредба Analysis-Modal [60].

4.1**КОНАЧНО-ЕЛЕМЕНТНИ МОДЕЛ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТИПА Н**

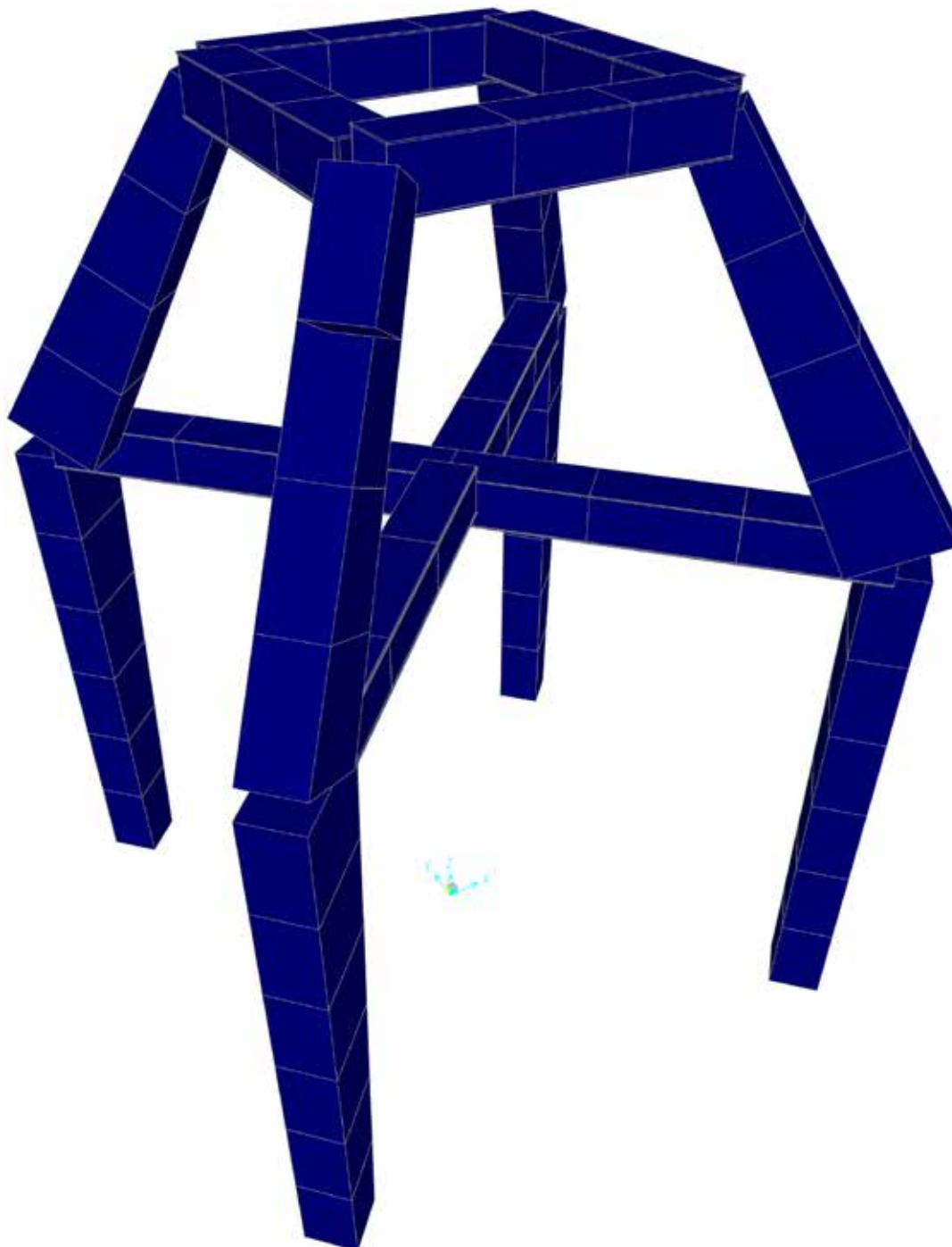
На слици 4.1 приказан је коначно-елементни модел носеће конструкције типа Н.



Слика 4.1 коначно-елементни модел носеће конструкције типа Н

4.2**КОНАЧНО-ЕЛЕМЕНТНИ МОДЕЛ НОСЕЋЕ КОНСТРУКЦИЈЕ ТИПА X**

На слици 4.2 приказан је коначно-елементни модел носеће конструкције типа X.



Слика 4.2 Коначно-елементни модел носеће конструкције типа X

5

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

5.1

ПОЛАЗНЕ ПОДЛОГЕ И ПОДАЦИ

Одређивање одговора формираних модела порталне дизалице је спроведено у оригиналном програму (коду) RV-DynPortal написаном у програмском пакету Wolfram Mathematica® 7, [53] и [54].

У поглављу 3 формиран су општи динамички модели портално-обртне дизалице два типа Н и Х. У наставку за ова два модела користе се скраћени називи модел Н и модел Х. У овом поднаслову овим моделима се додељују називна носивост m_Q , маса стреле m_s , главне мере портално-обртне дизалице и статичке карактеристике портала [2, 3, 4, 61].

Техничке карактеристике порталних дизалица типа Н и Х износе:

- Називна носивост, $m_Q = 10$ [t]
- Брзина дизалице, v_p [m/min]
- Маса стреле, $m_s = 9200$ [kg]
- Дужина стреле, $L_s = 30$ [m]
- Димензије основе портала, $L \times B = 6 \times 6$ [m]
- Висина ногу портала, $H = 6$ [m]
- Пречник прстена портала, $D = 4,243$ [m]
- Растојање између ослонаца обртне стреле, $H_0 = 3,675$ [m]
- Растојање зглоба стреле од осе стуба, $r = 1$ [m]

Материјал-челик носеће конструкције (портала) формираних модела порталне дизалице има следеће основне механичке карактеристике:

- густина, $\rho = 7850$ [kg/m³], и
- модул еластичности, $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ [N/mm²].

Усваја се да убрзање земљине теже износи $g = 9,81$ [m/s²].

У табели 5.1 су дате димензије попречних пресека за формиране моделе носеће конструкције (портала) порталне дизалице са конзистентним масама у поднаслову 3.2.

Табела 5.1 Димензије елемената портала типа *H* и *X*

<i>n</i>		1...4	5...8	9...12	13...18 (16)
H_n [mm]	<i>i</i>	530	524	1030	530
	<i>k</i>	1030	524	530	530
H_{n1} [mm]	<i>i</i>	500	500	1000	500
	<i>k</i>	1000	500	500	500
B_n [mm]	<i>i</i>	550	550	550	550
	<i>k</i>	550	550	550	550
B_{n1} [mm]	<i>i</i>	500	500	500	500
	<i>k</i>	500	500	500	500
δ_1 [mm]	<i>i</i>	10	12	10	10
	<i>k</i>	10	12	10	10
δ_2 [mm]	<i>i</i>	15	12	15	15
	<i>k</i>	15	12	15	15

У табелама 5.2 и 5.3 су дати подаци за формиране моделе портала (носеће конструкције) порталне дизалице са конзистентним масама у поднаслову 3.2.

Табела 5.2 Карактеристике усвојеног модела порталне дизалице *H*

Модел <i>H</i> $m_Q = 10$ [t]	<i>i</i>	1...4	5...8	9...12	13...18
	l_i [m]	6	4,243	3	3
	A_i [m ²]	31500×10^{-6}	31500×10^{-6}	26500×10^{-6}	25200×10^{-6}
	I_{yi} [m ⁴]	$3,117 \times 10^{-3}$	$3,117 \times 10^{-3}$	$1,303 \times 10^{-3}$	$1,115 \times 10^{-3}$
	I_{zi} [m ⁴]	$1,391 \times 10^{-3}$	$1,391 \times 10^{-3}$	$1,066 \times 10^{-3}$	$1,119 \times 10^{-3}$
	I_{xi} [m ⁴]	$2,776 \times 10^{-3}$	$2,776 \times 10^{-3}$	$1,630 \times 10^{-3}$	$1,611 \times 10^{-3}$

Табела 5.3 Карактеристике усвојеног модела порталне дизалице *X*

Модел <i>X</i> $m_Q = 10$ [t]	<i>i</i>	1...4	5...8	9...12	13...16
	l_i [m]	6	4,243	3	4,243
	A_i [m ²]	31500×10^{-6}	31500×10^{-6}	26500×10^{-6}	25200×10^{-6}
	I_{yi} [m ⁴]	$3,117 \times 10^{-3}$	$3,117 \times 10^{-3}$	$1,303 \times 10^{-3}$	$1,115 \times 10^{-3}$
	I_{zi} [m ⁴]	$1,391 \times 10^{-3}$	$1,391 \times 10^{-3}$	$1,066 \times 10^{-3}$	$1,119 \times 10^{-3}$
	I_{xi} [m ⁴]	$2,776 \times 10^{-3}$	$2,776 \times 10^{-3}$	$1,630 \times 10^{-3}$	$1,611 \times 10^{-3}$

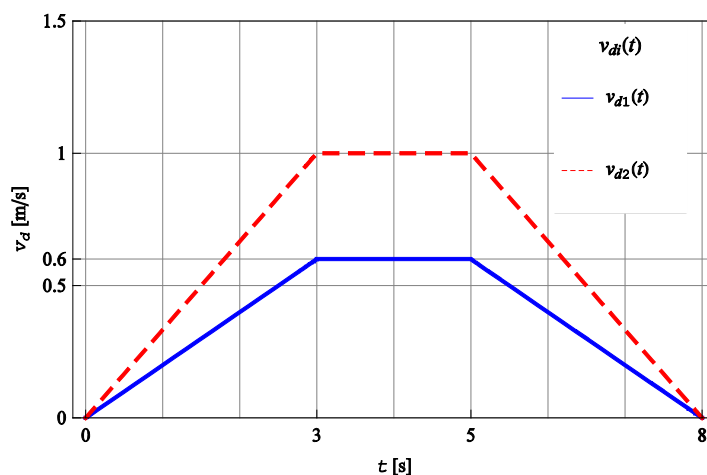
Иницијална крутост еластичних ослоњаца у оба модела износи $k = 10^7$ [N/m].

Сагласно дефинисаним корацима у решавању динамичке једначине равнотеже и одређеном фреквентном одговору носеће конструкције, у оквиру одређивања динамичког одговора прво се врши избор коефицијената пригушења носеће конструкције. Према радовима [7] и [13], препоручене вредности коефицијента пригушења заварених конструкција се крећу у границама $\xi = \xi_1 = \xi_2 = 0,5 \dots 7$ [%]. У овом раду иницијални модели обухватају пригушење материјала и аеродинамичко пригушење, преко коефицијента пригушења који износи $\xi = 0,005$. Додатно се разматра још случај са максималним пригушењем у носећој конструкцији, у ком коефицијент пригушења $\xi = 0,07$.

Затим је, на основу дијаграма брзине кретања портала са слике 3.1 а сагласно са одговарајућом дужином пута портала, брзином и убрзањем/успорјењем портала, формиран конкретан дијаграм брзине кретања портала на слици 5.1. Другим речима, дефинисана је побуда. Приказани дијаграм $v - t$ има номиналну брзину од $0,5$ [m/s] и убрзање/успорјење од $0,2$ [m/s²], што представља перформансе изведеног решења разматране дизалице. Такође, приказани дијаграм има и екстремну брзину портала од 1 [m/s], што представља перформансу порталне дизалице у будућности.

Посматра се праволинијско кретање портала од тачке до тачке. Сагласно томе, познати су почетни услови када се портал у тренутку $t_0 = 0$ налази у почетној тачки:

$$t_0 = 0: x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \ddot{x}_0 = 0$$



Слика 5.1 Временски дијаграм брзине кретања портала

Динамичка оптерећења $P_p(t)$ и $P_b(t)$ посматрају се као скуп дискретних вредности $P_{pi} = P_p(t)$ и $P_{bi} = P_b(t)$, где i узима вредности од 0 до p . Временски интервал алгоритма за решавање динамичке једначине равнотеже узима углавном вредности $\Delta t = 0,01$ [s]. Укупни временски домен $\tau = 8$ [s] дели се на $p = 80$ корака, тако да се добија временски интервал $\Delta t = 0,01$ [s].

У наставку, за постављене моделе у поглављу 3, је извршено одређивање одзива носеће конструкције изведеног решења порталне дизалице. У првом кораку, спроведена је модална анализа портала (носеће конструкције) према формираним моделима са конзистентним масама. У другом кораку, за исте моделе одређени су динамички одговори носеће конструкције.

5.2

АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА СТРЕЛЕ

Прво је извршена анализа динамичког одговора обртне стреле порталне дизалице, са карактеристикама датим у поднаслову 5.1. Стрела је иста код оба типа порталне дизалице.

5.2.1

Фреквентни одзив

Кружна фреквенција осциловања терета за полазне податке дефинисане у поднаслову 5.1 износи $\omega_t = 3,14 \text{ [s}^{-1}\text{]}$.

У табели 5.4 приказане су кружне фреквенције осциловања терета у зависности од дужине ужетног система. Табела 5.4 показује да се повећањем дужине ужетног система смањује кружна фреквенција осциловања терета.

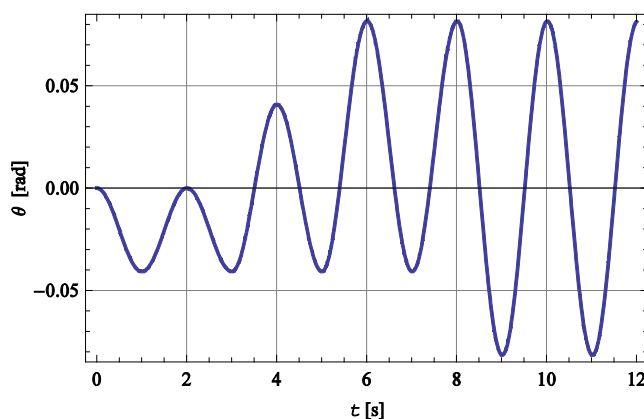
Табела 5.4 Кружне фреквенције осциловања терета

Дужина ужетног система, $L_u \text{ [m]}$	Кружна фреквенција, $\omega_t \text{ [s}^{-1}\text{]}$
1	3,14
3	1,81
5	1,40
7	1,18
9	1,04

5.2.2

Осциловање терета

Промена угла осциловања терета у подужном правцу θ за брзину $v_{d1} = 0,6 \text{ [m/s]}$ и $L_u = 1 \text{ [m]}$, на основу израза (3.15), приказана је на слици 5.2.



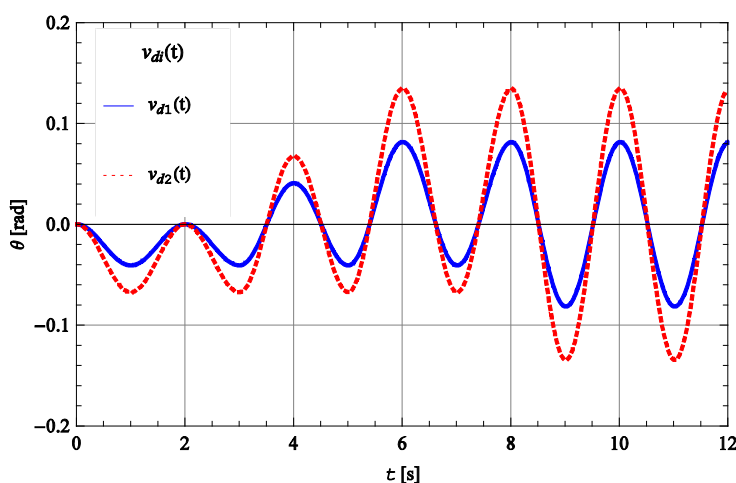
Слика 5.2 Промена угла осциловања терета у подужном правцу

Промена угла осциловања терета у бочном правцу ψ је потпуно иста промени угла осциловања терета у подужном правцу θ .

5.2.2.1

Утицај брзине и убрзања портала

Утицај брзине и убрзања покретног портала се сагледава кроз разматрање осциловања терета услед имплементације профила брзине кретања портала v_{d2} , која представља екстремну перформансу порталне дизалице. На слици 5.3, на основу израза (3.15), приказан је угао осциловања терета у подужном правцу за различите брзине кретања портала.



Слика 5.3 Угао осциловања терета у подужном правцу за различите брзине кретања портала

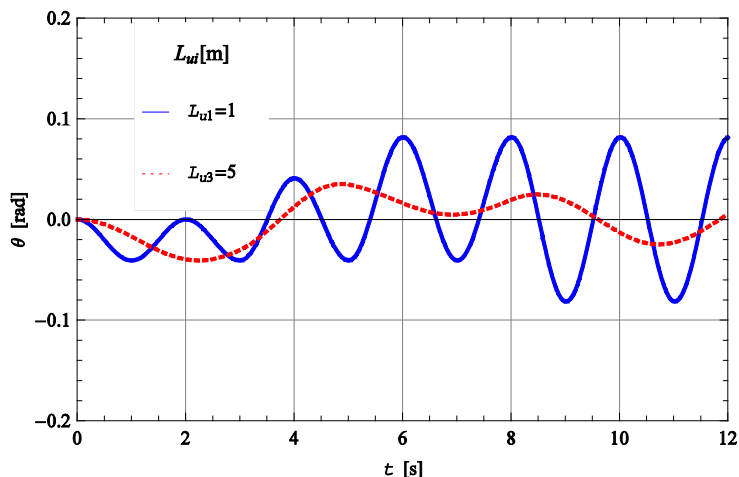
Слика 5.3 показује да се са повећањем брзине кретања портала повећава и отклон терета. Другим речима, амплитуде осциловања су веће при већој брзини кретања дизалице (v_{d2}). Највећи отклон за v_{d2} износи 0,1345 [rad] и већи је од вредности 0,0815 [rad] добијене за v_{d1} .

5.2.2.2

Утицај дужине ужетног система

Утицај дужине ужета се сагледава кроз упоредно разматрање осциловања терета за две различите дужине ужетног система $L_u = 1$ [m] и $L_u = 5$ [m]. Ова величина има утицај на промену периода осциловања. На слици 5.4, на основу израза (3.15), приказан је угао осциловања терета у подужном правцу за две различите дужине ужетног система.

Слика 5.4 показује да се угао осциловања терета смањује са повећањем дужине ужетног система. Такође, долази до повећавања периода осциловања.

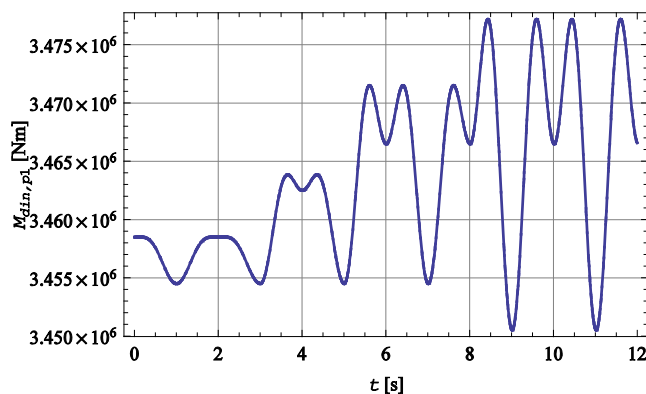


Слика 5.4 Угао осциловања терета у подужном правцу за различите дужине ужетног система

5.2.3

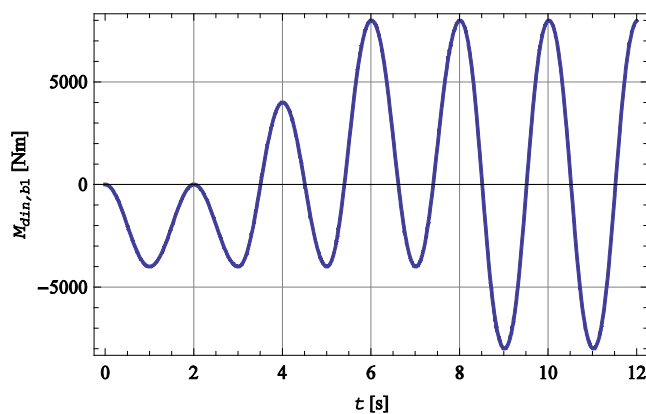
Динамички моменти

Промена динамичког момента савијања услед осциловања терета у подужном правцу θ , на основу израза (3.20), приказана је на слици 5.5.

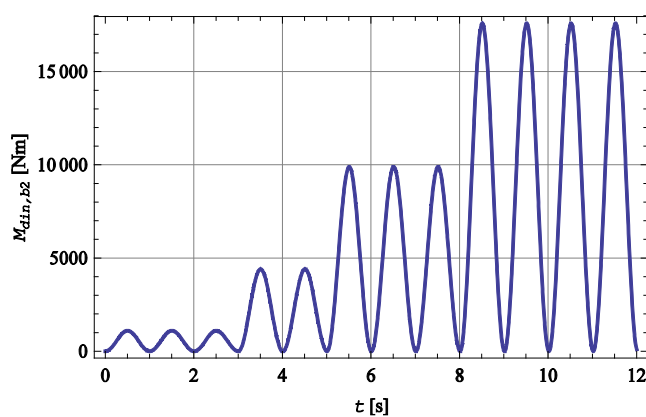


Слика 5.5 Промена динамичког момента савијања услед осциловања терета у подужном правцу

Промена динамичког момента савијања услед осциловања терета у бочном правцу ψ , на основу израза (3.21) и (3.22), приказана је на сликама 5.6 и 5.7.

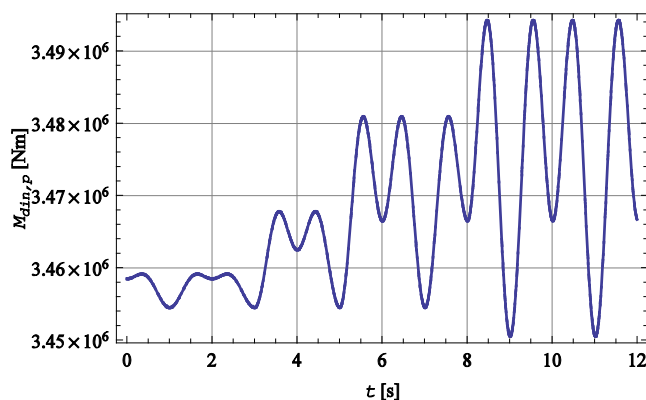


Слика 5.6 Промена динамичког момента савијања услед осциловања терета у бочном правцу – b_1



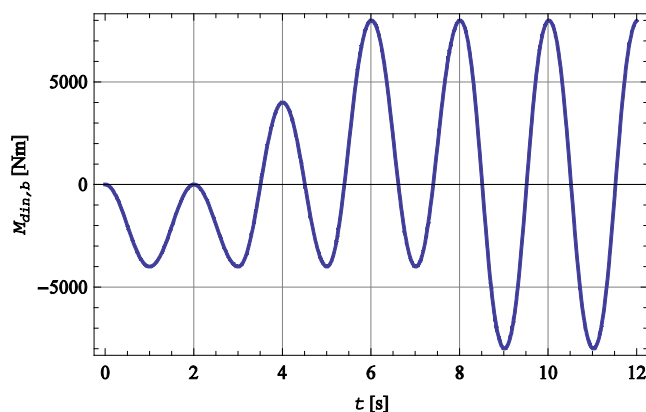
Слика 5.7 Промена динамичког момента савијања услед осциловања терета у бочном правцу – b_2

Промена динамичког момента савијања у подужном правцу θ , на основу израза (3.23), приказана је на слици 5.8.



Слика 5.8 Промена динамичког момента савијања у подужном правцу

Промена динамичког момента савијања у бочном правцу ψ , на основу израза (3.24), приказана је на слици 5.9.

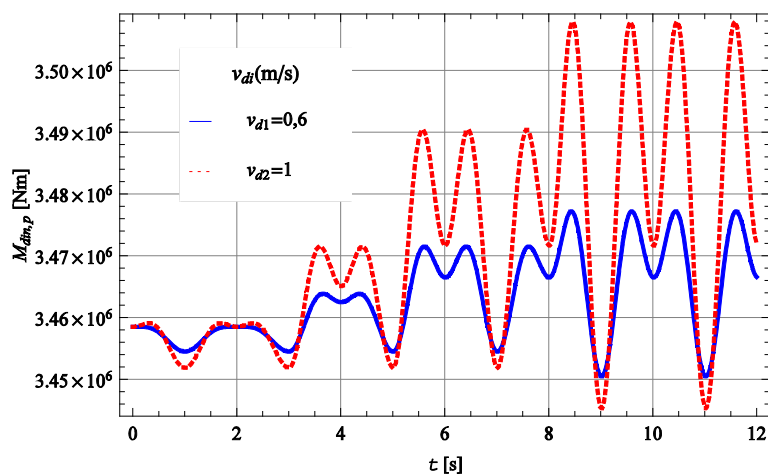


Слика 5.9 Промена динамичког момента савијања у бочном правцу

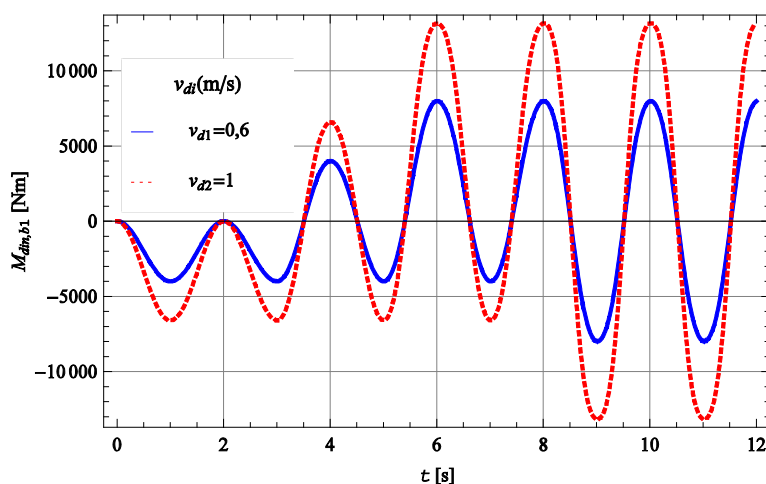
5.2.3.1

Утицај брзине и убрзања портала

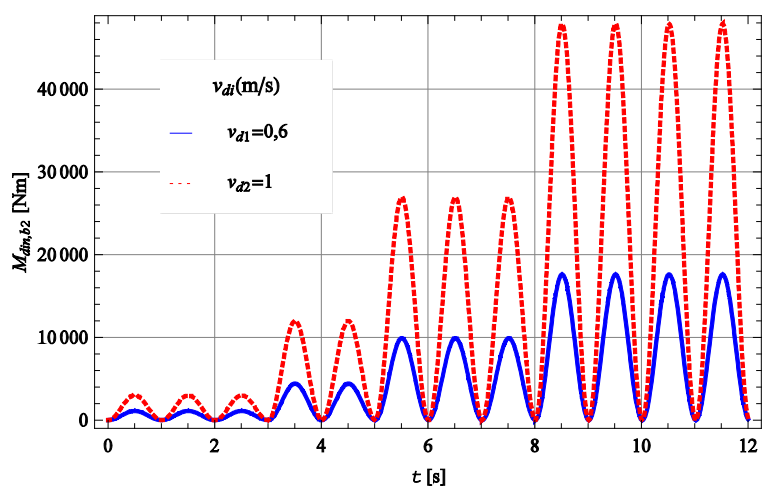
Утицај брзине и убрзања покретног портала се сагледава кроз разматрање динамичких оптерећења услед имплементације профила брзине кретања портала v_{d2} , која представља екстремну перформансу портала дизалице. На сликама 5.10...5.12, на основу израза (3.20), (3.21) и (3.22), приказани су разматрани динамички momenti савијања за различите брзине кретања портала. Ове слике показују да се динамички momenti савијања повећавају са повећањем брзине кретања портала.



Слика 5.10 Промена динамичког момента савијања, за различите брзине кретања, услед осциловања терета у подужном правцу



Слика 5.11 Промена динамичког момента савијања, за различите брзине кретања, услед осциловања терета у бочном правцу - b_1

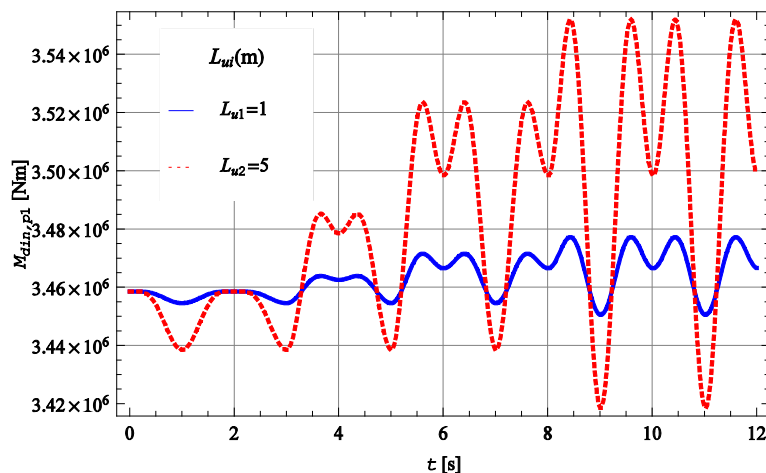


Слика 5.12 Промена динамичког момента савијања, за различите брзине кретања, услед осциловања терета у бочном правцу - b_2

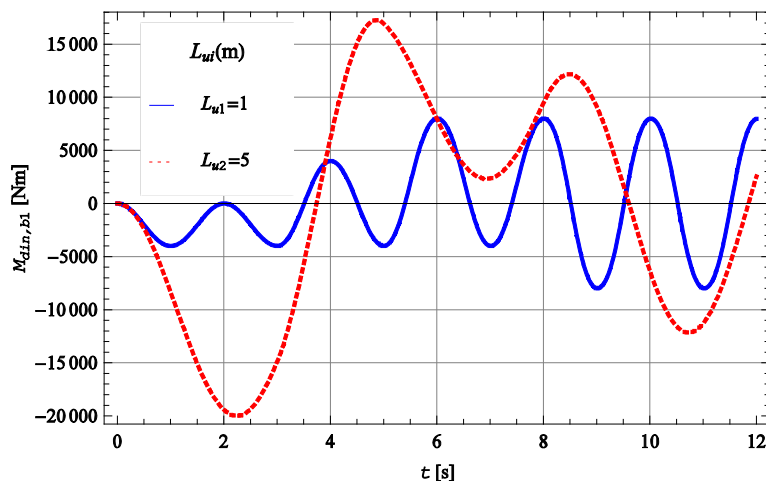
5.2.3.2

Утицај дужине ужетног система

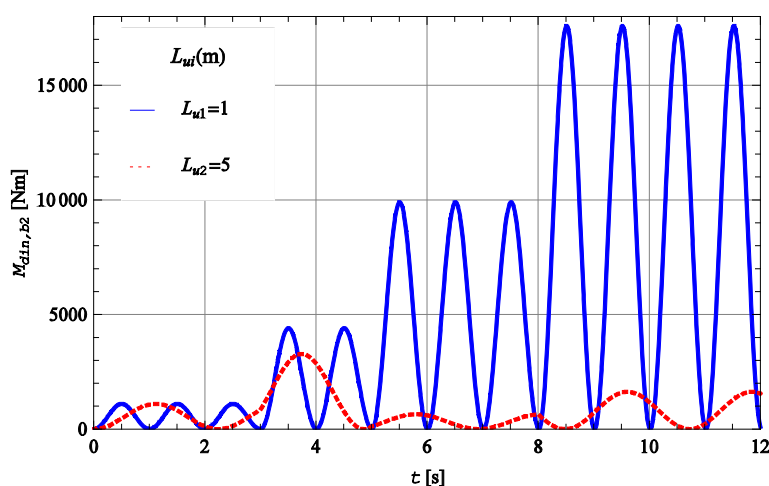
На сликама 5.13, 5.14 и 5.15, на основу израза (14), (15) и (16), приказани су динамички momenti савијања услед осциловања терета у подужном и бочном правцу за две различите дужине ужетног система. Ове слике показују да се прва два динамичка момента савијања повећавају са повећањем дужине ужетног система, док се трећи смањује.



Слика 5.13 Промена динамичког момента савијања, за различите дужине ужетног система, услед осциловања терета у подужном правцу



Слика 5.14 Промена динамичког момента савијања, за различите дужине ужетног система, услед осциловања терета у бочном правцу - b_1



Слика 5.15 Промена динамичког момента савијања, за различите дужине ужетног система, услед осциловања терета у бочном правцу - b_2

У истраживањима која следе користиће се да је дужина ужетног система једнака 1 [m].

5.3

АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА Н

Анализа динамичког одговора модела Н је обухватила:

- модалну анализу, и
- динамичка померања.

5.3.1

Модална анализа

Према моделу Н са конзистентним масама, слика 3.7, карактеристика дефинисаних у табели 5.1 и 5.2, извршена је анализа фреквентног одзива порталне дизалице тако што је решена фреквентна једначина (3.97).

Другим речима, одређене су сопствене фреквенције модела носеће конструкције порталне дизалице. У табели 5.4 је дато првих 6 сопствених фреквенција и периода осциловања.

Табела 5.4 Сопствене фреквенције и периоди осциловања модела

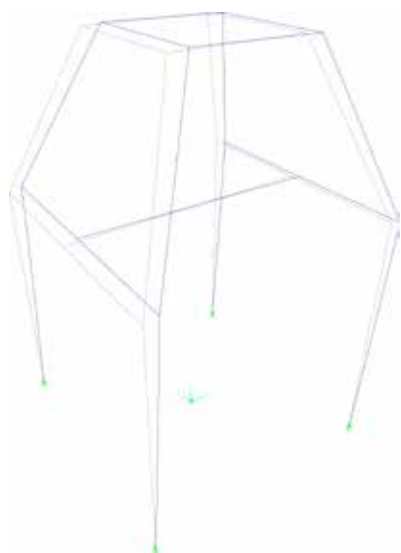
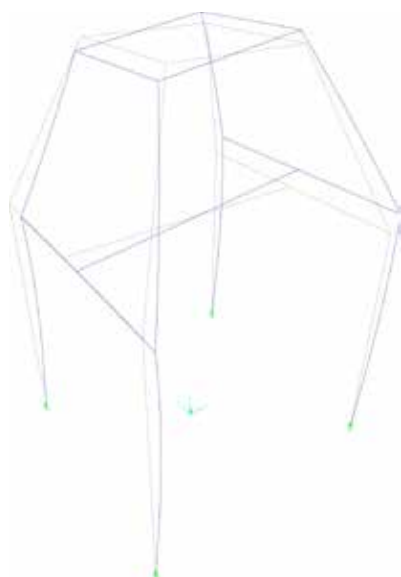
i	1	2	3	4	5	6
ω_i [s^{-1}]	16,63	18,78	36,82	49,34	79,81	110,38
T_i [s]	0,3777	0,3346	0,17065	0,1273	0,0787	0,0569
f_i [Hz]	2,65	2,99	5,86	7,85	12,70	17,57

За конструкцију су најопаснија резонантна стања у прва два-три главна облика осциловања, јер су тада амплитуде највеће и брзо доводе до лома конструкције [55]. С обзиром да је императив носећих конструкција транспортних, грађевинских и рударских машина мала маса, односно њихова виткост, уобичајено је да прва-најнижа (основна) фреквенција осциловања буде у опсегу од 0,5...3,5 [Hz] [55]. Како прва фреквенција осциловања модела Н износи 2,65 [Hz], то значи да се она налази у дефинисаном опсегу.

Верификација валидности математичког модела (модела са коначно-елементним приступом) носеће конструкције (портала) је потврђена КЕ моделом носеће конструкције формираним у софтверу SAP2000® [60].

На слици 5.16 приказано је првих шест облика осциловања носеће конструкције порталне дизалице.

Поређењем вредности фреквенција добијених преко математичког модела са коначно-елементним приступом и чистим нумеричким путем (FEM софтвер SAP2000®), уочава се одлично поклапање резултата прве две фреквенције са релативним одступањима $\Delta = (0,38; 0,66)$ [%]. И остале фреквенције се добро поклапају. Тако нпр. за следеће 4 фреквенције релативно одступање износи до 2,50 [%], што је за просторни модел врло добро).

а) први - основни, $f_1 = 2,65$ [Hz]б) други, $f_2 = 3,01$ [Hz]в) трећи, $f_3 = 5,84$ [Hz]г) четврти, $f_4 = 7,85$ [Hz]д) пети, $f_5 = 12,77$ [Hz]ђ) шести, $f_6 = 18,02$ [Hz]

Слика 5.16 Облици осциловања

5.3.2

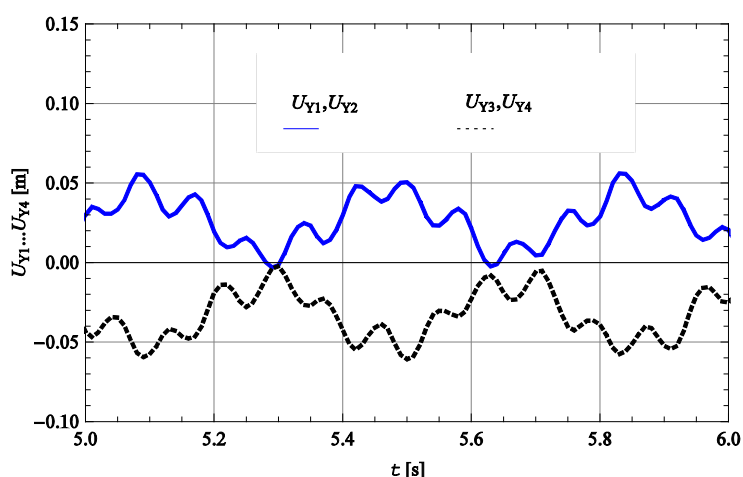
Динамичка померања

За одређивање динамичких померања модела Н разматра се случај када се дизалица креће номиналном брзином v_{d1} . Једначина (3.115) за истраживање динамичког понашања портално-обртне дизалице решена је путем директног, корак по корак, интеграционог метода. У програму Mathematica® написан је оригинални модул на бази Њумаркове интеграционе методе, [48, 53, 54]. Изабран је временски интервал интеграције од $\Delta t=0,01$. Динамички одговор портала на побуду, је пре свега, садржан у динамичком померању еластичних ослонаца модела за различите положаје стреле у односу на правац кретања дизалице. Добијена су динамичка померања за све степене слободе модела, али су презентована само најбитнија померања за испитивање динамичке стабилности разматране дизалице. Другим речима, издвајају се чворови 1...4 као карактеристична места на порталу, преко чијих одговора на побуду ће бити извршена анализа резултата модела Н.

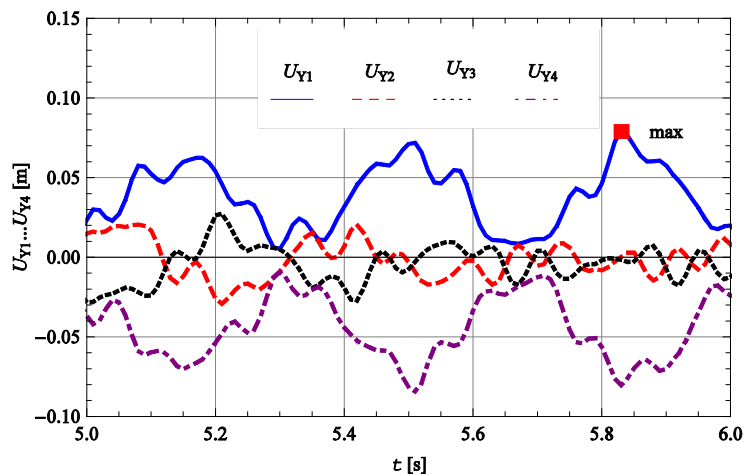
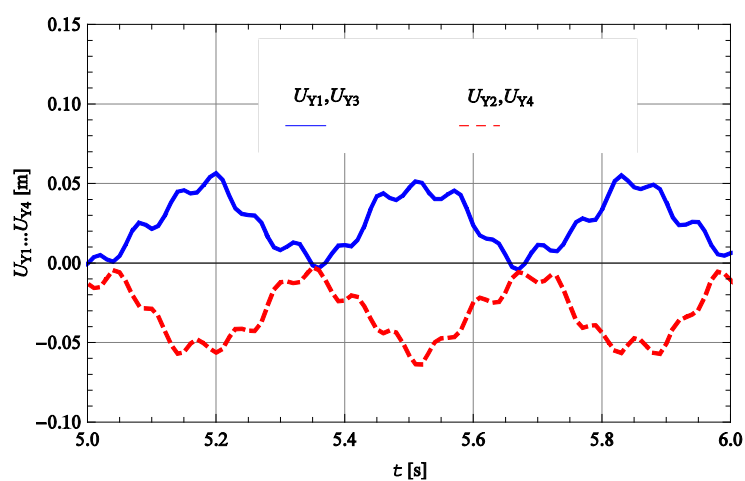
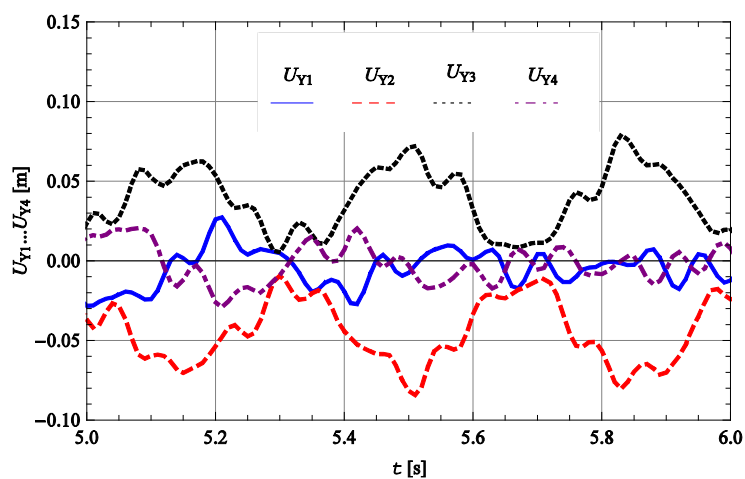
5.3.2.1

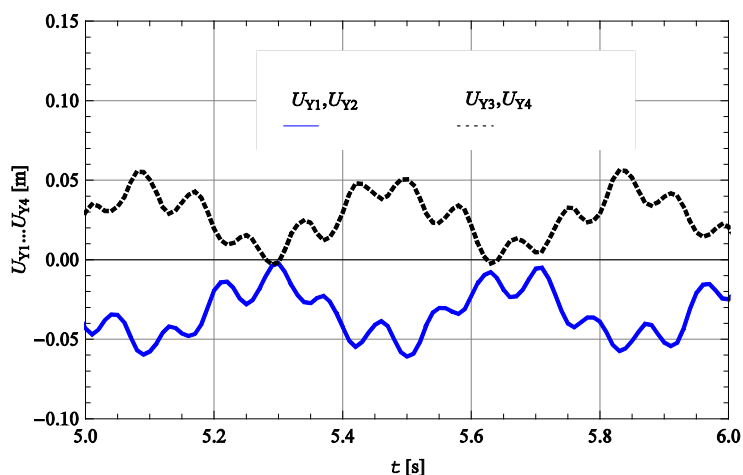
Модел не укључује пригушење у носећој конструкцији

У случају када модел не укључује пригушење у носећој конструкцији у једначини (3.115) матрица C је једнака 0. Издвојена су померања чворова 1...4. На сликама од 5.17 до 5.21 приказана је упоредна промена динамичких померања чворова 1...4 за карактеристичне положаје стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 0 [^\circ]$, $\varphi = 45 [^\circ]$, $\varphi = 90 [^\circ]$, $\varphi = 135 [^\circ]$, $\varphi = 180 [^\circ]$).



Слика 5.17 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi=0 [^\circ]$

Слика 5.18 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 45$ [°]Слика 5.19 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 90$ [°]Слика 5.20 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 135$ [°]



Слика 5.21 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 180 [^\circ]$

Како је носећа конструкција симетрична, са једне стране, и како је динамички момент савијања много већи у подужном у односу на бочни правац, са друге стране, то се динамичка померања чворова 1 и 2 односно 3 и 4 за угао стреле $0 [^\circ]$ и $180 [^\circ]$ готово поклапају. За угао стреле $0 [^\circ]$ померања чворова 1 и 2 су позитивна, док су за угао стреле $180 [^\circ]$ померања чворова 3 и 4 позитивна. Аналогно, померања чворова 1 и 3 односно 2 и 4 за угао стреле $90 [^\circ]$ се готово поклапају. Померања чворова 1 и 3 су позитивна. Значи, горња подструктура портала односно Н рам је мало осетљив на динамички момент савијања у бочном правцу.

За угао стреле $45 [^\circ]$ издваја се померање чвора 1, јер је позитивно. Аналогно, за угао $135 [^\circ]$ издваја се позитивно померање чвора 3.

На основу анализе померања еластичних ослонаца, слике 5.17...5.21, показано је да највеће позитивно померање има еластични ослонац - чвор "1" за вредност угла обртања стреле $\varphi = 45 [^\circ]$. Добијено је максимално динамичко померање критичног еластичног ослонаца од $78,929 [mm]$. У овом случају у пракси најчешће долази до одизања ноге портално-обртне дизалице.

Значи, носећа конструкција разматране порталне дизалице је највише осетљива за положај стреле $\varphi = 45 [^\circ]$. У складу са тим, овај положај је најмеродавнији за описивање динамичког стања носеће конструкције.

Сагласно, укљученим параметрима у математички модел разматране носеће конструкције порталне дизалице, добијена је очекивана вредност максималног динамичког померања.

5.3.2.2

Модел укључује пригушење у носећој конструкцији

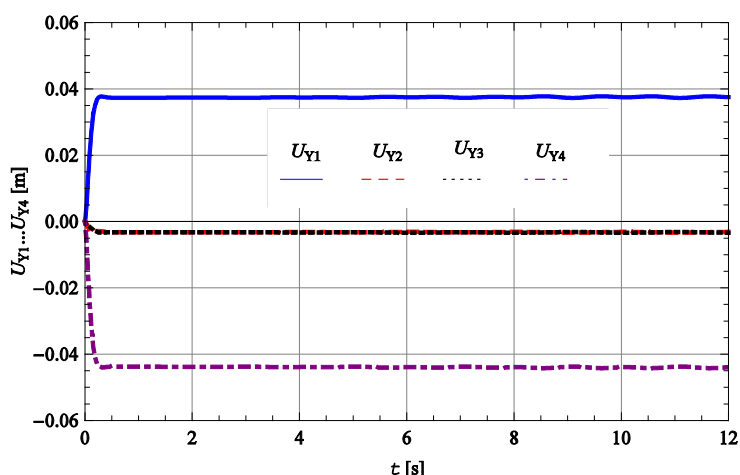
5.3.2.2.1

Основни модел пригушења

Основни модел укључује пригушење у носећој конструкцији дизалице са коефицијентом пригушења $\xi_1 = \xi_2 = 0,005$.

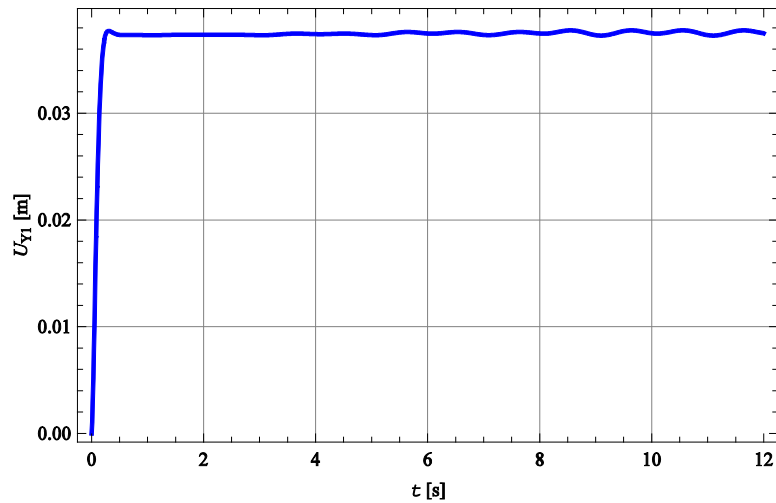
Издвојена су померања чворова 1...4, као карактеристична места на порталу дизалице. Упоредном анализом динамичких померања чворова 1...4 за различите положаје стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 0 [^\circ]$, $\varphi = 45 [^\circ]$, $\varphi = 90 [^\circ]$, $\varphi = 135 [^\circ]$, $\varphi = 180 [^\circ]$) утврђено је да је критични положај стреле $\varphi = 45 [^\circ]$. За овај положај стреле еластични ослонац "1" има позитивно померање, које је веће од позитивних померања еластичних ослонаца за све остале положаје стреле.

Сагласно реченом, издвојена су померања чворова 1...4. На слици 5.22 приказана је упоредна промена динамичких померања чворова 1...4 за критични положај стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 45 [^\circ]$).

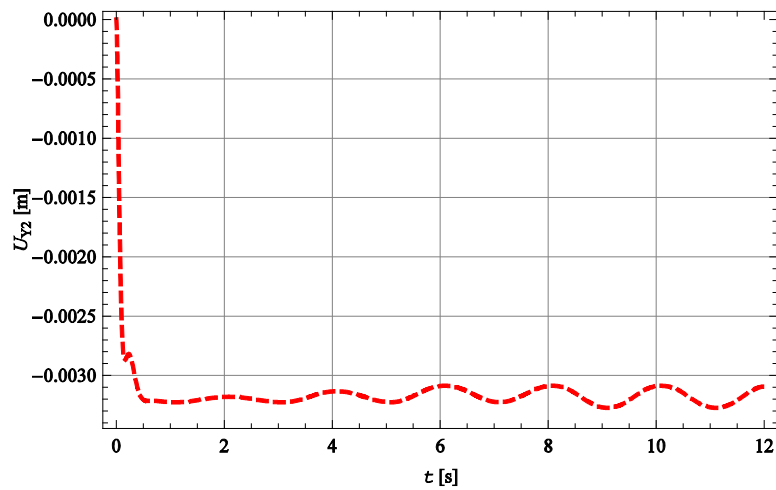


Слика 5.22 Промена динамичког померања чворова 1...4 за $\varphi = 45 [^\circ]$

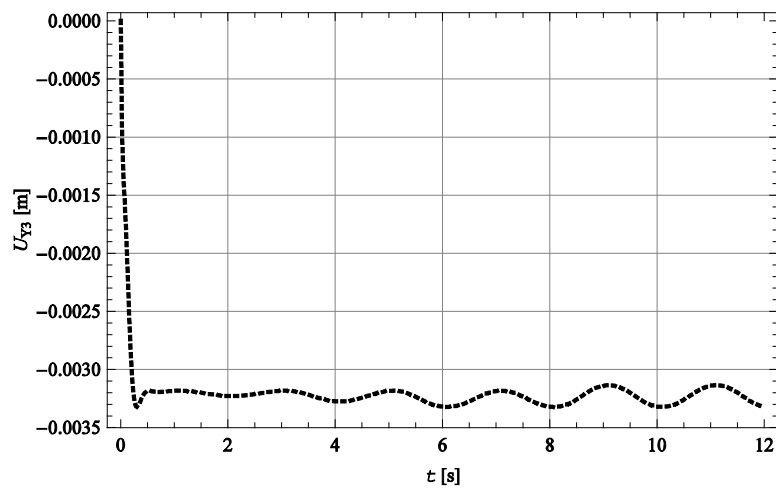
Ради бољег сагледавања карактера померања, на сликама од 5.23 до 5.27 приказане су појединачно промене динамичких померања чворова 1...4 за дефинисани критични положај стреле ($\varphi = 45 [^\circ]$).



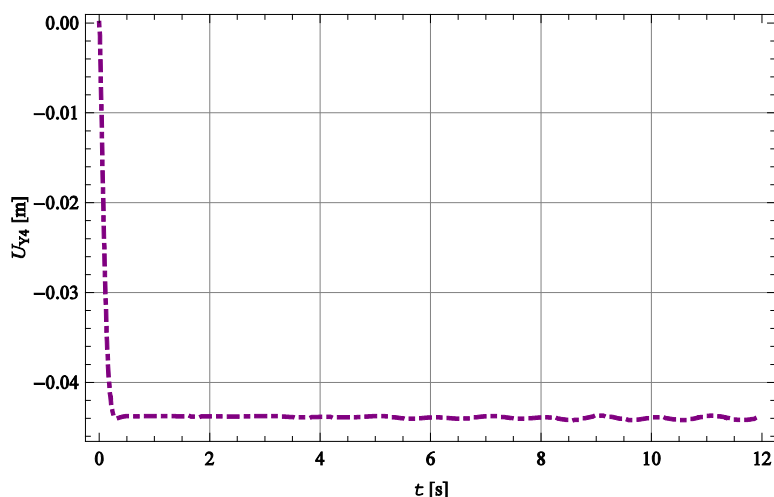
Слика 5.23 Промена динамичког померања чвора 1 за $\varphi = 45$ [°]



Слика 5.24 Промена динамичког померања чвора 2 за $\varphi = 45$ [°]



Слика 5.25 Промена динамичког померања чвора 3 за $\varphi = 45$ [°]



Слика 5.26 Промена динамичког померања чвора 4 за $\varphi = 45$ [°]

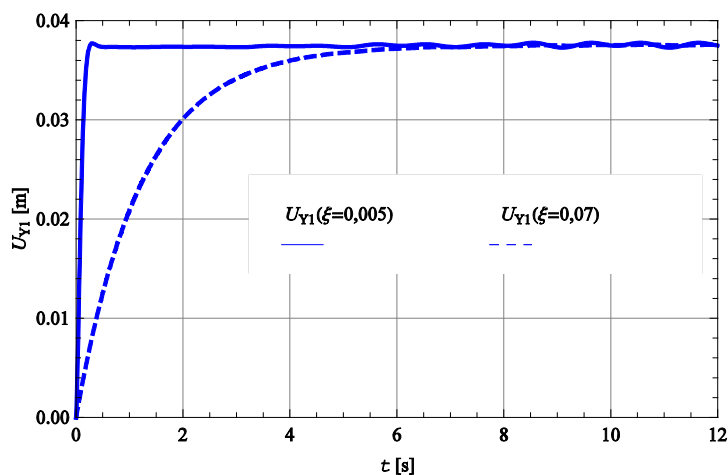
Закључује се да криве промена прзентованих померања имају облик графика експоненцијалне функције. На основу анализе померања еластичних ослонаца за критични положај стреле, слике 5.23...5.26, евидентно је да позитивно померање има само еластични ослонац - чвор "1". Добијено је да максимално померање чвора "1" износи 37,771 [mm]. У овом случају у пракси најчешће долази до одизања ноге портално-обртне дизалице. Максимално померање чвора "1" основног модела, који укључује пригушење у носећој конструкцији са коефицијентом пригушења од $\xi = 0,005$, је за 52,146 [%] мање у односу на непригушене осцилације.

5.3.2.2.2

Утицај пригушења

Додатно се разматра случај са максимално могућим коефицијентом пригушења у структури $\xi_1 = \xi_2 = 0,07$.

На слици 5.27 приказано је упоредно померање чвора 1 за основни модел пригушења ($\xi_1 = \xi_2 = 0,005$) и модел са максимално могућим пригушењем у носећој конструкцији ($\xi_1 = \xi_2 = 0,07$).



Слика 5.27 Упоредна промена динамичког померања чвора 1 за $\varphi = 45 [^\circ]$ основног модела пригушења и модела са максимално могућим пригушењем у носећој конструкцији

Дијаграмски резултати са слике 5.27 показују да се укључењем пригушења у носећу конструкцију знатно смањују амплитуде померања. Максимално померање чвора “1” за основни модел пригушења износи 37,771 [mm], док за модел са максималним коефицијентом пригушења износи 37,597 [mm]. Повећањем коефицијента пригушења од минималне вредности ($\xi = 0,005$) до максималне вредности ($\xi = 0,07$) максимално померање чвора “1” се мало смањује, и то за 0,461 [%]. Према слици 5.27, дијаграм померања са повећањем коефицијента пригушења поприма много блажи облик експоненцијалне функције.

5.4 АНАЛИЗА ДИНАМИЧКОГ ОДГОВОРА МОДЕЛА X

5.4.1 Модална анализа

Према моделу са конзистентним масама, слика 3.8, карактеристика дефинисаних у табели 5.1 и 5.3, извршена је анализа фреквентног одзива порталне дизалице тако што је решена фреквентна једначина (3.97).

Другачије речено, одређене су сопствене фреквенције модела носеће конструкције порталне дизалице. У табели 5.5 је дато првих 6 сопствених фреквенција и периода осциловања.

Табела 5.5 Сопствене фреквенције и периоди осциловања

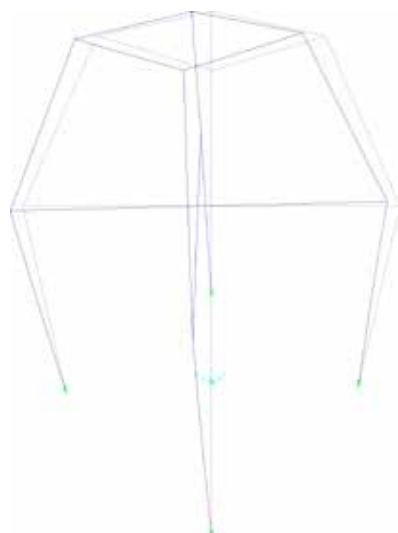
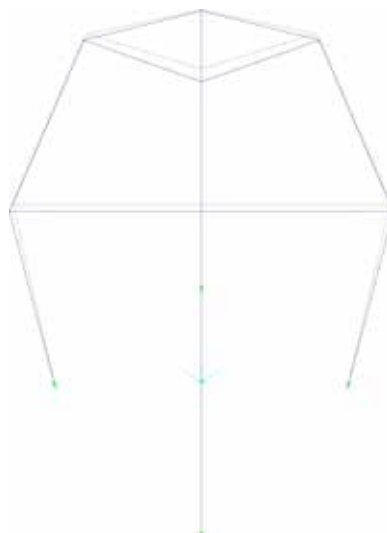
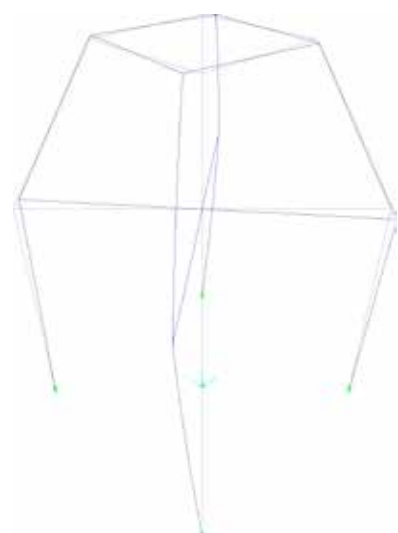
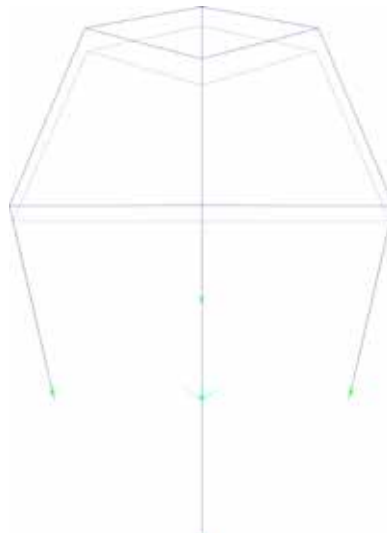
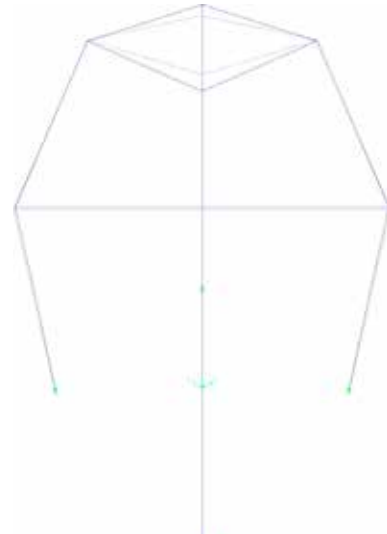
i	1	2	3	4	5	6
ω_i [s^{-1}]	17,09	18,32	33,03	49,73	85,86	100,81
T_i [s]	0,3677	0,3429	0,1902	0,1263	0,0732	0,0623
f_i [Hz]	2,72	2,92	5,26	7,92	13,66	16,04

Како прва фреквенција осциловања модела X износи 2,72 [Hz], то значи да се она налази у опсегу од 0,5...3,5 [Hz], дефинисаном у [55].

Верификација валидности математичког модела (модела са конзистентним масама) портала је потврђена КЕ моделом портала формираним у програмском пакету SAP2000® [60].

На слици 5.28 приказано је првих шест облика осциловања носеће конструкције порталне дизалице.

Поређењем вредности фреквенција добијених преко математичког модела са коначно-елементним приступом и чистим нумеричким путем (FEM софтвер SAP2000®), уочава се одлично поклапање резултата прве две фреквенције са релативним одступањима $\Delta = (0,37; 0,68)$ [%]. И остале фреквенције се добро поклапају. Тако нпр. за следеће 4 фреквенције релативно одступање износи до 2,08 [%], што је за просторни модел врло добро).

а) први - основни, $f_1 = 2,73$ [Hz]б) други, $f_2 = 2,94$ [Hz]в) трећи, $f_3 = 5,23$ [Hz]г) четврти, $f_4 = 7,91$ [Hz]д) пети, $f_5 = 13,75$ [Hz]ђ) шести, $f_6 = 16,38$ [Hz]

Слика 5.28 Облици осциловања

5.4.2

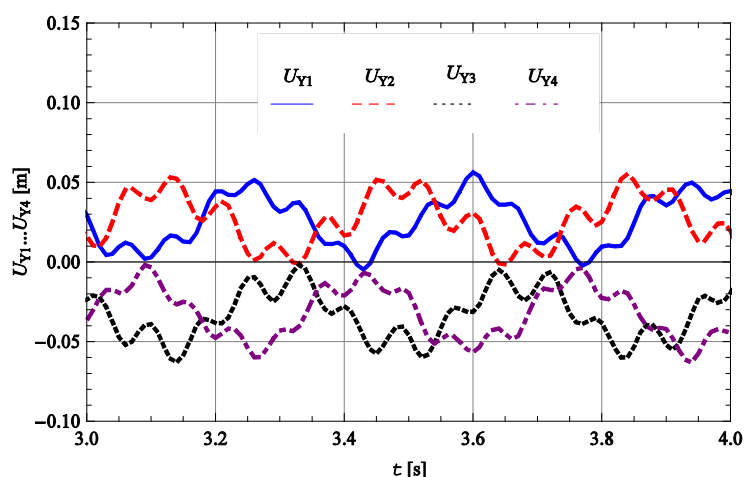
Динамичка померања

Динамичка померања модела X се одређују и разматрају аналогно као код модела H. Једначина динамичке равнотеже (3.115) решена је путем директног, корак по корак, интеграционог метода. У програму Mathematica® написан је оригинални модул на бази Њумаркове интеграционе методе, [48, 53, 54]. Изабран је временски интервал интеграције од $\Delta t=0,01$. Код одређивања динамичког одговора портала на побуду, акценат је дат на динамичка померања еластичних ослонаца модела за различите положаје стреле у односу на правац кретања дизалице. Добијена су динамичка померања еластичних ослонаца, која су битна за испитивање динамичке стабилности разматране дизалице.

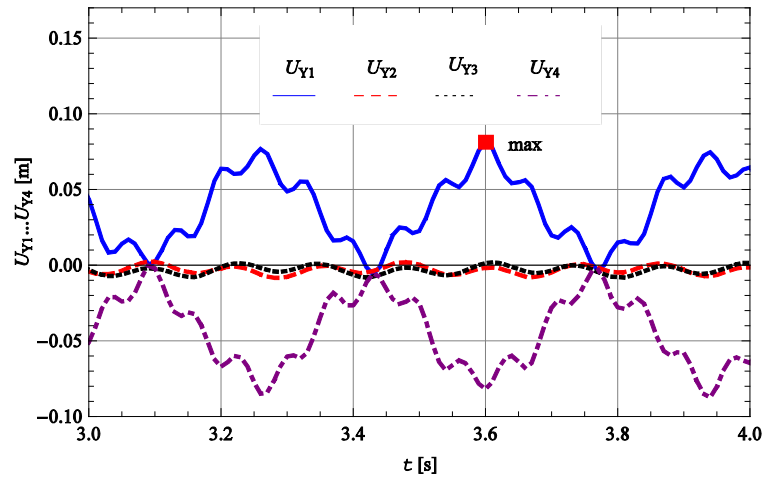
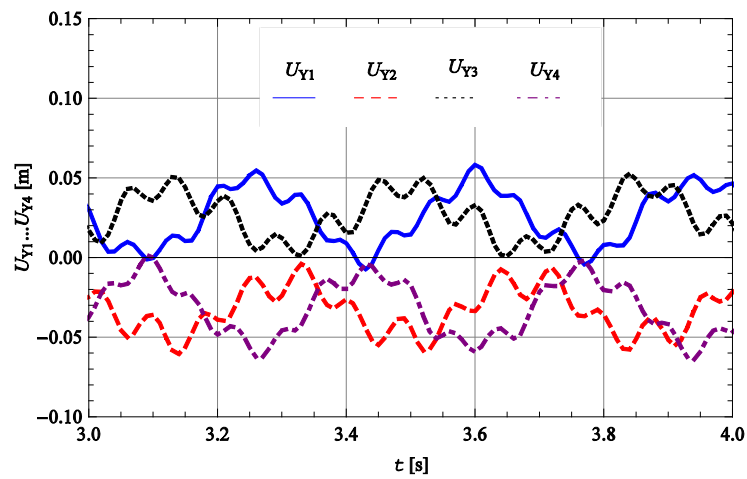
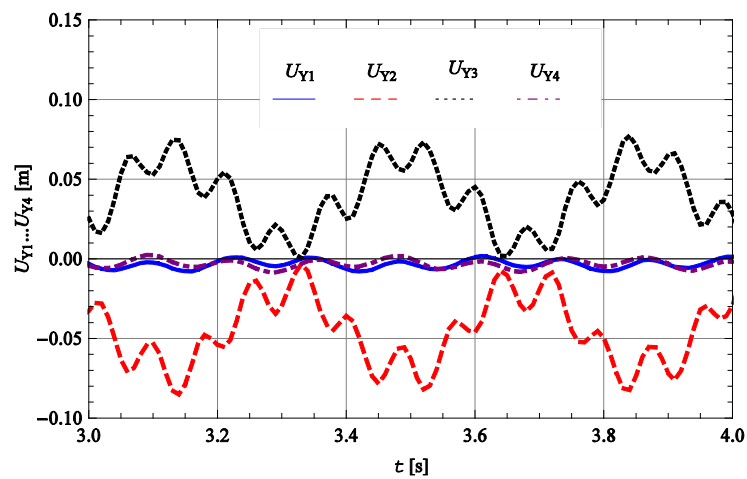
5.4.2.1

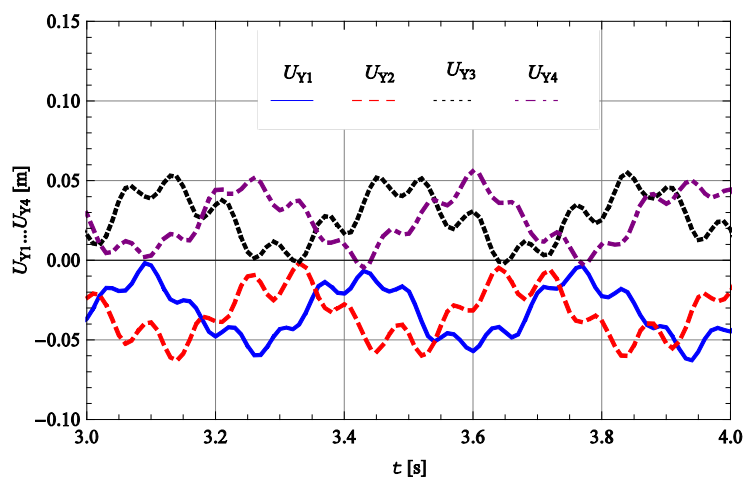
Модел не укључује пригушење у носећој конструкцији

У случају када модел не укључује пригушење у порталу у једначини (3.115) матрица C је једнака 0. На сликама од 5.29 до 5.33 приказана је упоредна промена динамичких померања чворова 1...4 за карактеристичне положаје стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 0 [^\circ]$, $\varphi = 45 [^\circ]$, $\varphi = 90 [^\circ]$, $\varphi = 135 [^\circ]$, $\varphi = 180 [^\circ]$).



Слика 5.29 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi=0 [^\circ]$

Слика 5.30 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi=45$ [°]Слика 5.31 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 90$ [°]Слика 5.32 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 135$ [°]



Слика 5.33 Динамичка померања чворова 1...4 за $\varphi = 180 [^\circ]$

За разлику од модела Н, код модела Х услед слабије крутости хоризонталног рама горње подструктуре динамички момент савијања у бочном правцу има већи утицај на вертикална померања еластичних ослонаца носеће конструкције, тако да динамичка померања чворова 1 и 2 односно 3 и 4 за угао стреле $0 [^\circ]$ и $180 [^\circ]$ нису блиска поклапању. Аналогно као код модела Н, за угао стреле $0 [^\circ]$ померања чворова 1 и 2 су позитивна, док су за угао стреле $180 [^\circ]$ померања чворова 3 и 4 позитивна. Аналогно углу стреле од $0 [^\circ]$ и $180 [^\circ]$, померања чворова 1 и 3 односно 2 и 4 за угао стреле $90 [^\circ]$ нису блиска поклапању. Померања чворова 1 и 3 су позитивна. Значи, горња подструктура портала односно Х рам је у односу на Н рам више осетљив на динамички момент савијања у бочном правцу.

За угао стреле $45 [^\circ]$ издваја се померање чвора 1, јер је позитивно. Аналогно, за угао $135 [^\circ]$ издваја се позитивно померање чвора 3.

На основу анализе померања еластичних ослонаца, слике 5.29...5.33, показано је да највеће позитивно померање има еластични ослонац - чвор "1" за вредност угла обртања стреле $\varphi = 45 [^\circ]$. Добијено је максимално динамичко померање критичног еластичног ослонаца од $81,167 [mm]$. У овом случају у пракси најчешће долази до одизања ноге портално-обртне дизалице.

Значи, носећа конструкција разматране порталне дизалице је највише осетљива за положај стреле $45 [^\circ]$. У складу са тим, овај положај је најмеродавнији за описивање динамичког стања носеће конструкције.

Сагласно, укљученим параметрима у математички модел разматране носеће конструкције порталне дизалице, добијена је очекивана вредност максималног динамичког померања.

Поређењем модела Н и модела Х закључује се да модел Н има мало већу стабилност против превртања.

5.4.2.2

Модел укључује пригушење у носећој конструкцији

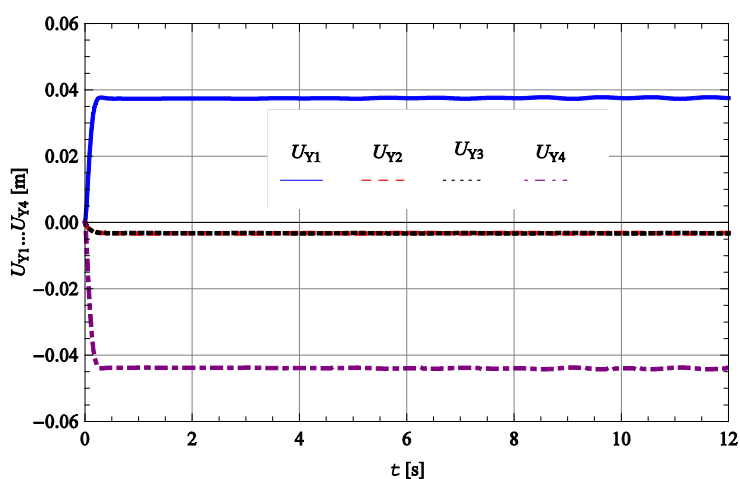
5.4.2.2.1

Основни модел пригушења

Основни модел укључује пригушење у носећој конструкцији дизалице са коефицијентом пригушења $\xi_1 = \xi_2 = 0,005$.

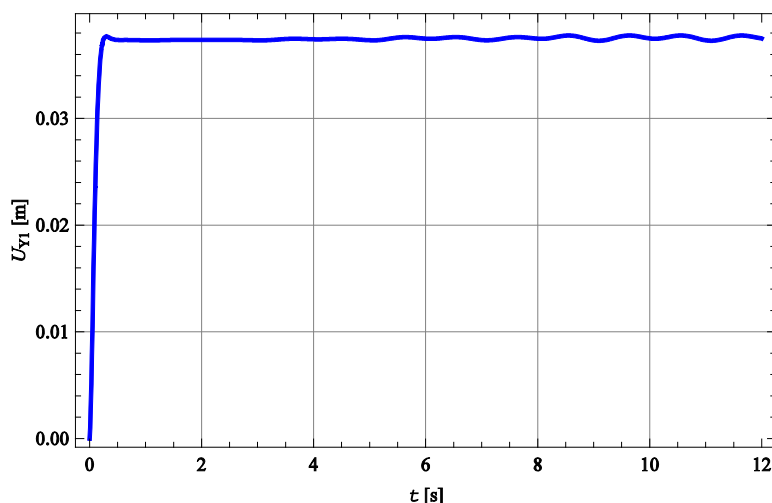
Упоредном анализом динамичких померања чворова 1...4 за различите положаје стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 0 [^\circ]$, $\varphi = 45 [^\circ]$, $\varphi = 90 [^\circ]$, $\varphi = 135 [^\circ]$, $\varphi = 180 [^\circ]$) утврђено је да је критични положај стреле $\varphi = 45 [^\circ]$. За овај положај стреле чвор "1" има позитивно померање, које је веће од позитивних померања еластичних ослонаца 1...4 за све остале положаје стреле.

На слици 5.34 приказана је упоредна промена динамичких померања чворова 1...4 за критични положај стреле у односу на праволинијско кретање портала ($\varphi = 45 [^\circ]$).

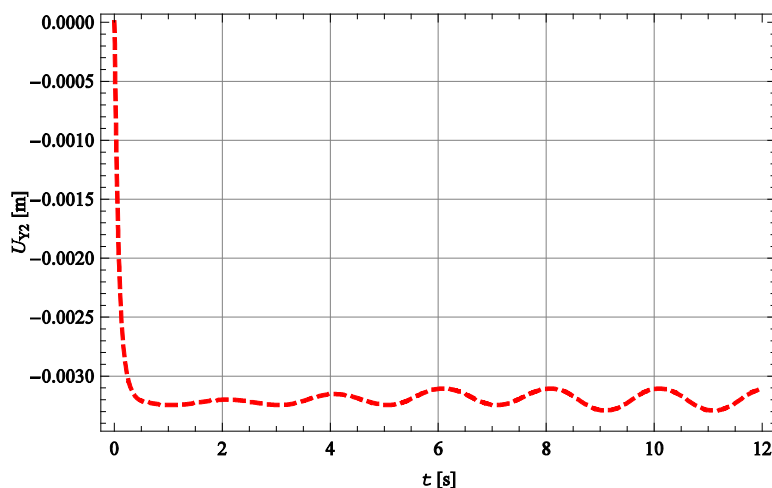


Слика 5.34 Промена динамичког померања чворова 1...4 за $\varphi = 45 [^\circ]$

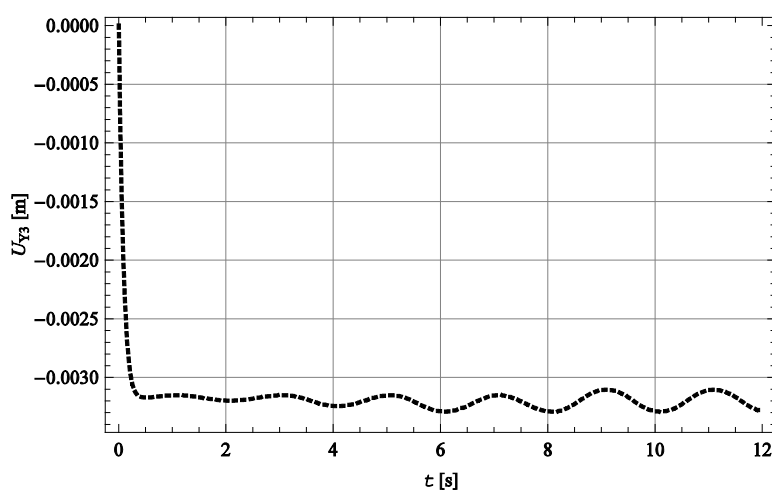
На сликама од 5.35 до 5.38 приказане су појединачно промене динамичких померања чворова 1...4 за дефинисани критични положај стреле ($\varphi = 45 [^\circ]$).



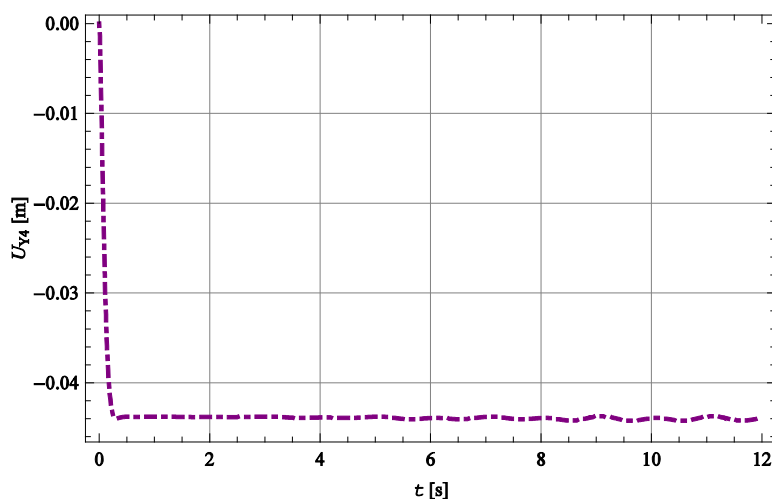
Слика 5.35 Промена динамичког померања чвора 1 за $\varphi = 45 [^\circ]$



Слика 5.36 Промена динамичког померања чвора 2 за $\varphi = 45$ [°]



Слика 5.37 Промена динамичког померања чвора 3 за $\varphi = 45$ [°]



Слика 5.38 Промена динамичког померања чвора 4 за $\varphi = 45$ [°]

На основу анализе померања еластичних ослонаца за критични положај стреле, слике 5.35...5.38, показано је да позитивно померање има само еластични ослонац - чвор "1". Максимално померање чвора "1" износи 37,780 [mm]. У овом случају у пракси најчешће долази до одицања ноге портално-обртне дизалице.

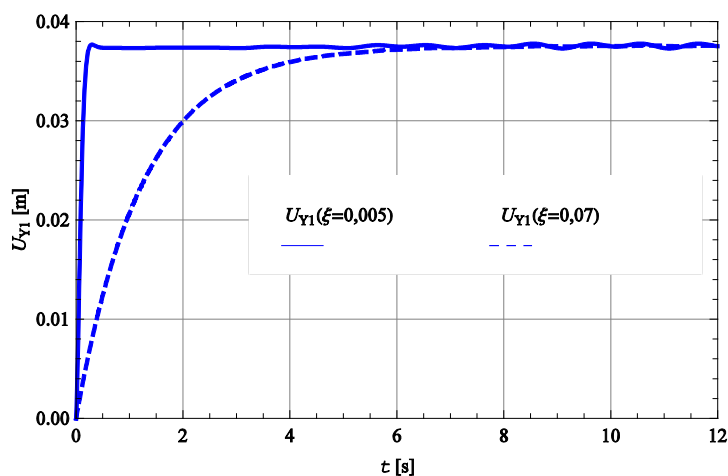
Максимално померање чвора “1” основног модела са укљученим пригушењем у носећој конструкцији ($\xi = 0,005$) је за 53,454 [%] мање у односу на непригушене осцилације.

5.4.2.2.2

Утицај пригушења

Аналогно као код модела Н, додатно се разматра случај са максимално могућим коефицијентом пригушења у структури $\xi_1 = \xi_2 = 0,07$.

На слици 5.39 приказано је упоредно померање чвора 1 за основни модел пригушења ($\xi_1 = \xi_2 = 0,005$) и модел са максимално могућим пригушењем у носећој конструкцији ($\xi_1 = \xi_2 = 0,07$).



Слика 5.39 Упоредна промена динамичког померања чвора 1 за $\varphi = 45$ [°] основног модела пригушења и модела са максимално могућим пригушењем у носећој конструкцији

Аналогно као код модела Н, резултати са слике 5.39 показују да се укључењем пригушења у портал знатно смањују амплитуде померања. Максимално померање чвора “1” за основни модел пригушења износи 37,780 [mm], док за модел са максималним коефицијентом пригушења износи 37,605 [mm]. Повећањем коефицијента пригушења од минамалне вредности ($\xi = 0,005$) до максималне вредности ($\xi = 0,07$) максимално померање чвора “1” се мало смањује, и то за 0,463 [%]. Аналогно као код модела Н, према слици 5.27, дијаграм померања са повећањем коефицијента пригушења поприма много блажи облик експоненцијалне функције.

Сагласно добијеним резултатима, ако се осцилације разматрају без пригушења то доводи до сигурнијих конструкција са аспекта напона и деформација зато што динамички одговори на побуду имају веће амплитуде осциловања око статичких вредности. Данас, савремена истраживања машинских елемената и носећих структура са аспекта поузданости су усмерена на смањење подручја сигурности, што омогућује пројектовање рационалних структура и елемената [62].

6 ЗАКЉУЧАК

У докторској дисертацији обрађени су проблеми везани за утицајне параметре на динамичко понашање носеће конструкције порталних дизалица великих носивости. У ужем смислу, разматране су порталне дизалице два типа Н и Х. Са аспекта истраживања динамичког понашања, портална дизалица је посматрана као систем који се састоји из два основна подсистема, и то обртне стреле и портала (носеће конструкције).

У литератури из области динамике конструкција осцилације носећих конструкција порталних дизалица, нису довољно описане. Број радова из динамике порталних дизалица је релативно мали. Већим делом радови се баве проблематиком управљања. Неки типови ових дизалица нису масовно заступљени и не производе се серијски, већ искључиво по спецификацији наручиоца. Пошто се код раније изведених решења порталних дизалица није довољно изучавала динамика и оптимизација конструкције, то постоји простор за смањивање масе и оптимизацију попречног пресека конструкције. Сагласно овим чињеницама, главне активности код истраживања динамичког понашања порталне дизалице у овој дисертацији биле су:

- Одређивање закона осциловања терета у подужном и бочном правцу,
- Модална анализа носеће конструкције (портала), и
- Одређивање динамичког одговора носеће конструкције на побуду.

Пре него што се приступило истраживању динамичког понашања конкретних типова порталних дизалица, постављене су одговарајуће подлоге. Прво су дата уводна разматрања о проблематици порталних дизалица. Дефинисана је намена порталних дизалица, техничке карактеристике које утичу на ефикасност њиховог рада и њихове главне конструкционе мере. Илустрован је један могући предлог класификације порталних дизалица. Затим, дата су уводна разматрања о проблематици динамике порталних дизалица. Дат је свеобухватан преглед релевантних истраживања из области динамике порталних и сличних дизалица. На крају су дате концепције конструкционих решења носеће конструкције и дефинисане њихове карактеристике.

На почетку истраживања порталних дизалица типа Н и Х дефинисана је побуда услед кретања порталне дизалице и клаћења терета. Усвојено је да се дизалица креће према трапезном профилу брзина кретања. За овај случај презентовани су кинематички дијаграми брзине, убрзања и пута кретања дизалице, слика 3.1. Основа за дефинисање побуде је дијаграм убрзања/успорења кретања порталне дизалице.

Сагласно савременој и релевантној литератури, у дисертацији је усвојен комбиновани приступ за формирање динамичких модела конструкција. Даље, користећи усвојени приступ развијен је конкретан комбиновани приступ за формирање динамичких модела портално-обртних дизалица. Развијени приступ је детаљно дефинисан и објашњен. Развијени комбиновани приступ реално разматра сложену конструкцију портално-обртне дизалице, тако да исти има значајне предности у односу на приступ свођења сложене конструкције на једноставне моделе.

Развијени приступ комбинује аналитички и коначно-елементни приступ. У првом кораку, принципи аналитичке механике су искоришћени за моделирање обртне стреле, док је у другом кораку, коначно-елементни приступ искоришћен за моделирање два конструкциона типа (Н и Х) носеће конструкције порталне дизалице. Усвојено је да оба типа порталних дизалица, Н и Х, имају исти конструкциони тип обртне стреле. Динамички модел обртне стреле представља надградњу постојећих савремених модела стрела. Овај динамички модел је омогућио добијање закона осциловања терета у простору односно у подужном и бочном правцу. Ови закони осциловања терета представљају *Хевисајдове (степенасте) функције са линеарним полиномом*. Дефинисана је динамичка интеракција између обртне стреле и носеће конструкције оба конструкциона типа (Н и Х). У великој мери постоји аналологија у дефинисању поменуте динамичке интеракције код оба модела. Сагласно коначно-елементном приступу и дефинисаној интеракцији формирана су два коначно-елементна модела порталних дизалица типа Н и Х. Како је установљено да места контакта точкова портала дизалице и шина железничке пруге престављају најрелевантније идентификоване делове дизалице за анализу њеног динамичког понашања односно динамичке стабилности, то су ова места моделирана као еластични ослонци односно четири еквивалентне вертикалне опруге. У том смислу у дисертацији је стављен акценат на одређивање динамичких одговора еластичних ослонаца на побуду. Ови модели представљају оригиналне динамичке моделе разматраних типова порталних дизалица.

Свођењем динамичких оптерећења на оба модела носеће конструкције преко динамичке интеракције постављене су диференцијалне једначине кретања система односно једначине динамичке равнотеже. Постављени математички модели система представљају оригиналне моделе система, који са једне стране узимају у обзир трансверзалне и подужне осцилације елемената носеће конструкције, док са друге стране узимају у обзир утицај побуде односно кретања портала и клаћења портала. Основа утицаја кретања портала и клаћења портала чине *Хевисајдове (степенасте) функције са линеарним полиномом*.

За верификацију математичких модела односно коначно-елементних модела са конзистентним масама оба конструкциона типа носеће конструкције у програмском пакету SAP2000® формиран су одговарајући КЕ модели.

Примена и провера исправности постављених теоријских основа је извршена на нумеричком примеру порталне дизалице са два различита типа носеће конструкције (Н и Х). Како је нумерички пример заснован на реалној конструкцији, то је и приступ пробелему истраживања динамичког понашања порталне дизалице реалан. Резултати и дискусије су изложени сагласно теоријском делу дисертације.

У првом делу нумеричког примера су дати резултати и дискусије за динамички модел обртне стреле разматране порталне дизалице. Побуда је дефинисана за кретање дизалице брзином $v = 0,6$ [m/s] и $v = 1$ [m/s]. Резултати решења динамичког модела обртне стреле указују на следеће:

- Повећењем перформанси кретања дизалице (брзина/убрзање) повећава се клађење терета односно угао осциловања терета, који се даље одражавају на повећање динамичких оптерећења (динамичких момената савијања у подужном и бочном правцу);
- Повећањем дужине ужетног система смањује се кружна фреквенција осциловања терета, што се даље одражава на смањење угла осциловања терета и и повећавање периода осциловања;
- Промена параметара из прве две ставке даље се одражава на динамички одговор математичких модела са коначно-елементним приступом (модел Н и модел Х) на побуду;
- Постављене су подлоге које омогућавају предвиђање понашања система обртне стреле услед промене утицајних параметара (нпр. брзине кретања дизалице и дужине ужетног система);

У другом делу нумеричког примера су дати резултати и дискусије за коначно-елементне моделе носеће конструкције порталне дизалице (Модел Н и Модел Х).

Модална анализа модела Н и модела Х показала је да се прва-најнижа (основна) фреквенција осциловања налази у опсегу од 0,5...3,5 [Hz], односно да је испуњен услов за малом масом, односно њиховом виткошћу. Упоредивањем прве фреквенције код модела Н и модела Х закључује се да је модел Н еластичнији, јер има нижу прву фреквенцију за 2,57 [%]. Верификација валидности КЕМ (модела са конзистентним масама) носеће конструкције (портала) је потврђена КЕ моделом носеће конструкције - SAP2000®. Поређењем вредности фреквенција добијених преко математичког модела са коначно-елементним приступом и чистим нумеричким путем (FEM софтвер SAP2000®), уочава се одлично поклапање резултата прве две фреквенције са релативним одступањима $\Delta = (0,38; 0,66)$ [%].

Анализом резултата динамичких одговора математичких модела са коначно-елементним приступом (модел Н и модел Х) на побуду изведени су следећи закључци:

- Места еластичних ослонаца односно вертикалних опруга представљају најрелевантније идентификоване елементе модела Н и модела Х порталне дизалице за анализу њеног динамичког понашања односно динамичке стабилности;
- Омогућено је разумевање понашања еластичних ослонаца поменутих модела услед дејства побуде;
- Највеће вертикално померање има еластични ослонац (вертикална опруга) односно нога која се налази на супротном делу портала по обе осе у односу на стрелу окренуту за угао од 45 [°] у односу праволинијско кретање дизалице по шинама;
- Повећање структуралног пригушења у КЕ моделу носеће конструкције доводи до смањења амплитуда померања;
- Упоредним поређењем померања еластичних ослонаца модела Н и модела Х закључује се да су веома блиска. Тачније, критични еластични ослонац модела Х има веће вертикално померање за 0,26 [%]. Другим речима, модел Н има мало већу стабилност против превртања у одосу на модел Х;

- Постављене су подлоге које омогућавају предвиђање понашања система носеће конструкције услед промене утицајних параметара (нпр. брзине кретања дизалице, пригушења носеће конструкције и крутости еластичних ослонаца односно вертикалних опруга итд.).

Презентовани динамички модели представљају замену за класични експеримент, који је са једне стране тешко реализовати, док је са друге стране веома скуп. Динамички модел обртне стреле се може применити и на друге типове носећих конструкција порталних дизалица. Такође, и математички модели са коначно-елементним приступом се уз одговарајуће модификације могу применити на сличне носеће конструкције порталних дизалица. Како модел обртне стреле тако и модели носеће конструкције разматраних порталних дизалица могу се даље надоградити и побољшати укључивањем већег броја параметара.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Острић Д., Тошић С.: ДИЗАЛИЦЕ, Машински факултет, Београд, 2005.
- [2] Мијаиловић Р., Јовановић М., Маринковић З.: ДИЗАЛИЦЕ - основе, Градина, Ниш, 1994.
- [3] А. Ланг, И. Мазовер, В. Майзель, "ПОРТАЛЬНЫЕ КРАНЫ – расчёт и конструирование", Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, Москва-Ленинград, 1962.
- [4] Петухов П.З., Ксюнин Г.П., Серлинн Л.Г.: СПЕЦИАЛЬНЫЕ КРАНЫ, Машиностроение, Москва, 1985.
- [5] Sawodny O., Neupert J., Arnold E.: Actual trends in crane automation – directions for the future, *FME Transactions*, 37 4, p.167-174, 2009.
- [6] Хрватско друштво за механику: Вибрације овјешених мостова услјед кише и вјетра, http://www.csm.hr/archive/Brcic_sazetak.pdf
- [7] Chopra A.K.: DYNAMICS OF STRUCTURES - Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rd edition, Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [8] Clough R.W., Penzien J.: DYNAMICS OF STRUCTURES, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [9] Karnovsky I., Lebed O.: ADVANCED METHODS OF STRUCTURAL ANALYSIS, Springer, New York, 2010.
- [10] Брчић В.: ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЈА, Грађевинска књига, Београд, 1978.
- [11] Ђорић Б., Салатић Р.: ДИНАМИКА ГРАЂЕВИНСКИХ КОНСТРУКЦИЈА, Грађевинска књига, Београд, 2011.
- [12] Острић Д.: ДИНАМИКА МОСНИХ ДИЗАЛИЦА, Машински факултет, Београд, 1998.
- [13] Георгијевић М.: ДИНАМИКА ДИЗАЛИЦА - експериментална и моделска анализа, Задужбина Андрејевић, Београд, 1996.
- [14] Jerman B., Hribar, A.: Dynamics of the mathematical pendulum suspended from a moving mass, *Tehnički vjesnik - Technical Gazette*, vol. 20, no. 1, p. 59-64, 2013.
- [15] Vasiljević R., Gašić M.: The Dynamic Model of the Boom Portal Cranes. *IMK-14 – Research & Development in Heavy Machinery*, vol. 21, no. 4, p. EN125-130, 2015.
- [16] Fryba L.: VIBRATION OF SOLIDS AND STRUCTURES UNDER MOVING LOADS. 3rd edition, Thomas Telford, 1999.

- [17] Gašić V., Zrnić N., Rakin M.: Dynamics of the mathematical pendulum suspended from a moving mass, *Tehnički vjesnik - Technical Gazette*, vol. 19, no. 1, p. 115-121, 2012.
- [18] Штимац И., Мештровић Д., Кожар И.: Анализа мостовних конструкција побуђених покретним оптерећењем, *Грађевинар*, vol. 56, no. 6, p. 347-353, 2004.
- [19] Raubar, E., Vrančić, D.: Anti-Sway System for Ship-to-Shore Cranes. *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, vol. 58, no. 5, p. 338-344, 2012.
- [20] F.E.M 1.001, Rules for the design of hoisting appliances, European Materials Handling Federation, Belgium, 1998.
- [21] Gašić M., Savković M., Bulatović R.: Optimization of Trapezoidal Cross Section of the Truck Crane Boom by Lagrange's Multipliers and by Differential Evolution Algorithm (DE), *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, vol. 57, no. 4, p. 304-312, 2011.
- [22] Dresig H.: Ermittlung der Massenkräfte beim Wippen von Doppellenkerkranen, *Hebezeuge und Fördermittel*, p. 178, 1967.
- [23] Jovanović M., Radoičić G., Milić P.: Selection of Finite Elements Considering Loadcases and Geometry, Proc. XIX International Conference MHCL'09, p. 61-66, 2009.
- [24] Sun Y., Li D.: Dynamic Analysis and Design Method Study on the Combined-boom System of Portal Crane, *Applied Mechanics and Materials*, vol. 152-154, p. 1645-1649, 2012.
- [25] Zheng Y., Hu Y., Wu B.: Finite Element Modal Analysis of Four-link Combination Portal Crane, 3rd International Conference on Mechatronics, p. 662-665, 2015.
- [26] Wu J.J.: Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 50, p. 613-625, 2008.
- [27] Gašić V., Zrnić N., Milovančević M.: Considerations of Various Moving Load Models in Structural Dynamics of Large Gantry Cranes, *FME Transactions*, vol. 41, no. 4, p. 311-316, 2013.
- [28] Wu J.J.: Dynamic responses of a threedimensional framework due to a moving carriage hoisting a swinging object, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, no. 13, p. 1679-1702, 2004.
- [29] Yazid E., Parman S. and Fuad K.: Vibration analysis of flexible gantry crane system subjected swinging motion of payload, *Journal of Applied Sciences*, vol. 10, p. 1707-1715, 2011.
- [30] Younesian D., Ghafoori E., Sadeghpour M.: Nonlinear vibration of a threedimensional moving gantry crane subjected to a travelling trolley hoisting a swinging object, *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, vol. 34, no. 3-4, p. 333-350, 2010.

- [31] Osinski M., Wojciech S.: Application of Nonlinear Optimisation Methods to effect Input Shaping of the Hoist Drive of an Off-Shore Crane, *Nonlinear Dynamics*, vol. 17, p. 369-388, 1998.
- [32] Sochacki W.: The dynamic stability of a laboratory model of a truck crane, *Thin-Walled Structures*, vol. 45, p. 927-930, 2007.
- [33] Maczynski A., Szczotka M.: Comparison of Models for Dynamic Analysis of a Mobile Telescopic Crane, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 40, no. 4, p. 1051-1054, 2002.
- [34] Fujioka D., Rauch A., Singhose W.: Selection of Finite Elements Considering Loadcases and Geometry Double-Pendulum Payloads, American Control Conference, p. 3136-3014, 2009.
- [35] Gustafsson T.: On the Design and Implementation of a Rotary Crane Controller, *European Journal of Control*, vol. 2, no. 3, p. 166-175, 1996.
- [36] Huimin O., Naoki U., Shigenori S.: Anti-Sway Control of Rotary Crane Only by Horizontal Boom Motion, IEEE International Conference on Control Applications, p. 591-595, 2010.
- [37] Гашић В.: Анализа динамичког понашања претоварних мостова за угаљ у термоелектранама, Магистарска теза, Машински факултет, Београд, 2004.
- [38] Marinović, I., Sprečić, D., Jerman, B.: A slewing crane payload dynamics, *Tehnički vjesnik - Technical Gazette*, vol. 19, no. 4, p. 907-916, 2012.
- [39] Vasiljević R., Gašić M., Savković M.: Parameters Influencing the Dynamic Behaviour of the Carrying Structure of a Type H Portal Crane, *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, vol. 62, no. 10, p. 591-602, 2016. DOI:10.5545/sv-jme.2016.3553.
- [40] Krodkiewski J.M.: MECHANICAL VIBRATION, The University of Melbourne, Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, Melbourne, 2008.
- [41] Meirovich L.: ELEMENTS OF VIBRATION ANALYSIS, McGraw-Hill, 1986.
- [42] Радосављевић Љ.: ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА, Машински факултет, Београд, 1981.
- [43] Рашковић Д.: ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА, Научна књига, Београд, 1965.
- [44] Вујичић В.: ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА, Научна књига, Београд, 1977.
- [45] Обрадовић А., Марковић С.: ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА, Народна књига, Београд, 1996.
- [46] Рашковић Д.: ЗБИРКА ЗАДАТАКА ИЗ МЕХАНИКЕ III - ТЕОРИЈА ОСЦИЛАЦИЈА, Завод за издавање уџбеника СРС, Београд, 1969.
- [47] Vasiljević R., Savković M., Bulatović R.: The Approaches to the Mathematical-mechanical Modeling Supporting Construction, *IMK-14 - Research & Development in Heavy Machinery*, vol. 19, no. 1, p. EN29-38, 2013.
- [48] Bathe K.J.: FINITE ELEMENT PROCEDURES, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- [49] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: THE FINITE ELEMENT METHOD, Fifth edition, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

- [50] Yijun L.: LECTURE NOTES: INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD, University of Cincinnati, Mechanical Engineering Department, from <http://urbana.mie.uc.edu/yliu/FEM-525/FEM-525.htm>, accessed on 2003-May-21.
- [51] Lee H.-H.: A New Motion-Planning Scheme for Overhead Cranes With High-Speed Hoisting, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 126, p. 359-364, 2004.
- [52] Зрнић Н.: Утицај кретања колица на динамичко понашање обалских контејнерских дизалица – докторска сисертација, Машински факултет, Београд, 2005.
- [53] Wolfram: MATHEMATICA® , <http://www.wolfram.com>
- [54] Magrab E.: ENGINEERS GUIDE TO MATHEMATICA®, John Wiley and Sons, Chichester, 2014.
- [55] Петковић З., Острић Д.: МЕТАЛНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ У МАШИНОГРАДЊИ 1, Машински факултет, Београд 1996.
- [56] Гашић В.: Динамичка интеракција носеће структуре и колица порталних дизалица високих перформанси – докторска сисертација, Машински факултет, Београд, 2012.
- [57] Петковић З.: МЕТАЛНЕ КОНСТРУКЦИЈЕ У МАШИНОГРАДЊИ 2, Машински факултет, Београд 2005.
- [58] Paz, M., Leigh, W.: Structural dynamics, theory and computation, Springer, 2004.
- [59] Spyrakos, C.: Finite Element Modeling in Engineering Practice, Algor, Inc., Pittsburgh, 1994.
- [60] University of Berkeley: Computers and Structures, SAP2000, <http://www.csiberkeley.com/sap2000>
- [61] Гашић М.: Утицај односа геометријских величина елемената портала на везу са окретним делом преко лежаја код пристанишних дизалица – докторска дисертација, Машински факултет, Београд, 1989.
- [62] Милтеновић В.: МАШИНСКИ ЕЛЕМЕНТИ – облици, прорачун и примена, Машински факултет, Ниш, 2009.